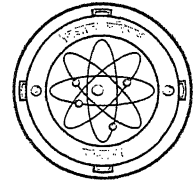
The Research Journal of
the Hindi Science Academy

# Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol.46 October 2003 No.4

## विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

# विषय सूची

Vol.46 October 2003 No.4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# घूर्णी विषमांग तरल में थर्मोसोल्यूटी संवहन

विजय मेहता तथा सरोज चौधरी

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय जोधपुर (राज०)

[ प्राप्त—फरवरी 4, 2002]

## सारांश

मुक्त परिसीमाओं वाले घूर्णी विषमांग तरल संस्तर में थर्मोसोल्यूटी (theromosolutal) संवहन का अध्ययन किया गया है। स्थिर तथा घूर्णी दोनों ही प्रकार के संवहन की विवेचना की गई है। इससे यह निष्कर्ष निकाला गया है कि स्थायित्व के विनिमय का सिद्धांत वैध नहीं है।

## Abstract

**Thermosolutal convection in a rotating heterogeneous fluid.** *By* Vijay Mehta and Saroj Choudhary, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, jodhpur (Raj.).

In the present paper, the thermosolutal convection in a rotating heterogeneous fluid layer with free boundaries has been investigated. The problem is analysed in terms of normal modes. Both the stationary and oscillatory convections have been discussed as a result of which it is concluded that the principle of exchange of stability is not valid.

## 1. प्रस्तावना

थर्मोसोल्यूटी संवहन (thermosolutal convection) अपनी द्विगुणन विसरण की घटना के कारण शोध का विषय बना हुआ है। इसमें ताप तथा विलेय सान्द्रता में विचरण के कारण ही बल उत्पन्न होते हैं। चन्द्रशेखर ने[2] नीचे से गर्म किये जा रहे तरल के संस्तर के उष्मीय संवहन के सिद्धांत को द्रवचुम्बकीय की विविध संकलनाओं के अन्तर्गत परखा है । नील्ड[6] ने तरल के नीचे से गरम किये जा रहे श्यान तरल के क्षैतिज संस्तर में थर्मोहैलाइन संवहन की समस्या पर विचार किया है। इन समस्याओं में सामान्यतया विलेय कोई लवण होता है

किन्तु आवश्यक नहीं है इसलिए यह समस्या समुद्र विज्ञान, सरोवर विज्ञान तथा इंजीनियरी में विशेष महत्व रखती है। वेस्ट तथा अर्पासी[7] ने इस समस्या के अतिस्थायित्व पर शोधकार्य किया है। ग्रीन ने[4] दो स्वतन्त्र परिसीमाओं के लिए अतिस्थायित्व की समस्या का अध्ययन किया है। भाटिया तथा स्टाइनर ने[1] चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अतिस्थायित्व का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अप्रगामी स्थिर तथा दोलनी दोनों प्रकार के संवहन का विश्लेषण करना है।

## 2. प्रमेय का सूत्रण तथा आवश्यक समीकरण

दो स्वतंत्र परिसीमाओं $z = 0$ तथा $z = 1$ के मध्य संचारक श्यान असंपीड्य विषमांग तरल के अपरिमिति क्षैतिक संस्तर पर विचार करें, जहाँ z ऊर्ध्व दिशा की ओर का है। विषमांग तरल का घनत्व $\rho_0 f'(z)$ के रूप में है जहाँ $\rho_0$ निम्न परिसीमा पर घनत्व है और $f'(z)$ स्थिर है। तरल संस्तर को गरम किया जाता है और नीचे से विलेय बनाया जाता है। तरल z - अक्ष पर कोणीय वेग $\Omega(0, 0, \Omega)$ के साथ चक्कर लगाता है । तरल पर ऊर्ध्व चुम्बकीय क्षेत्र $H(0, 0, H)$ कार्यशील है। प्रमेय का वर्णन करने वाले सम्बद्ध समीकरणों को निम्नवत् दिया जा रहा है -

$$\rho_0 \frac{Dq}{Dt} = -\nabla P + g\rho + 2P_0(q x \Omega) + \mu \nabla^2 q - \frac{\rho_0 V}{k} + \frac{\mu_e}{4\pi}(H.\nabla)H \qquad (2.1)$$

$$\nabla.q = 0 \qquad (2.2)$$

$$\nabla.H = 0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (q.\nabla)T = K_t \nabla^2 t \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (q.\nabla)\rho = 0 \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (q.\nabla)C = K_t \nabla^2 c \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \times (q \times H) + \eta \nabla^2 H \qquad (2.7)$$

तथा $$\rho = \rho_o\, [f(z) - \alpha(T - T_0) + \alpha'(c - c_0)] \qquad (2.8)$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $q(u,v,w)P,\rho,T,C,\alpha,\alpha',g,\eta$ क्रमशः वेग, दाब, घनत्व, ताप, विलेय सान्द्रता, प्रसार का उष्मीय गुणांक, विलायक का प्रसार गुणांक, गुरुत्वाकर्षणीय त्वरण तथा चुम्बकीय प्रतिरोधकता है। अतः $v=\mu/\rho_o$ श्यानता है, $\mu_e$ चुम्बकीय पारगम्यता, kt उष्मीय विसरणशीलता, kc विलेय विसरणशीलता - ये सभी अचर हैं ।

विभिन्न भौतिक मात्राओं की प्रारम्भिक तथा क्षुब्ध अवस्थाओं पर निम्नवत् विचार किया जा रहा है -

| | प्रारंभिक | क्षुब्ध |
|---|---|---|
| 1. वेग | $q = o$ | $q=\delta_q(u,v,w)$ |
| 2. दाब | $P=\rho_o^{-gc}-\frac{\rho_o}{2}[\Omega\times\alpha]^2-\frac{\mu_e}{4\pi}.\frac{H^2}{2}$ | $p=p+\delta_p$ |
| 3. ताप | $T=T_o-\beta z$ | $T=T+\delta T$ |
| 4. सान्द्रता | $C=L_o-\beta^2$ | $C=C+\delta C$ |
| 5. चुम्बकीय क्षेत्र | $H = (0, 0, H)$ | $H=H+\delta H(h_x h_y h_z)$ |

क्षुब्ध रूप में समीकरण (2.1-2.7) के सरलरेखी घटक निम्नवत् हैं -

$$\rho_o\frac{\partial u}{\alpha t}=-\frac{\partial}{\partial x}\delta\rho+2\rho_o\Omega v+\rho_o v\nabla^2\mu-\frac{\rho_o v}{k}u+\frac{\mu_e H}{4\pi}.\frac{\partial h_x}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$\rho_o\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\delta\rho-2\rho_o\Omega u+\rho_o v\nabla^2 v-\frac{\rho_o v}{k}u+\frac{\mu_e H}{4\pi}.\frac{\partial h_Y}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\rho_o\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\partial\rho-g(\partial\rho-\alpha\rho_o\partial T+\alpha'\rho_o\partial C)+\rho_o\nabla^2 w-\frac{\rho_o v}{k}w+\frac{\mu_o H}{4\pi}.\frac{\partial hz}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}+\frac{\partial h_z}{\partial z}=0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho+\rho_o f'(z)w=0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T - \beta w = k_t \nabla^2 \delta T \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta C - \beta' w = k_t \nabla^2 \delta C \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_x = \eta \nabla^2 h_x + H\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_y = \eta \nabla^2 h_y + H\frac{\partial v}{\partial z} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_z = \eta \nabla^2 h_z + H\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.19}$$

## 3. सामान्य मोड ( बहुलक ) विश्लेषण

सामान्य मोड के पदों में विक्षोभों का विश्लेषण करते हुए हम कल्पना करेंगे कि विक्षोभ की मात्राओं का स्वरूप निम्नवत् है -

$$[u, \delta T, \delta C, h_z, \zeta, \xi] = [W(z), T(z), C(z), H(z), Z, X]\exp(ik_x + ik_y + nt)$$

जहाँ n वृद्धि दर है, kx तथा ky क्रमशः x तथा y दिशाओं में तरंग संख्याएं हैं, $(k^2 = k^2{}_x + k^2{}_y)$ ।

$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ वेग को तथा $\xi = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}$ धारा घनत्व को बताते हैं ।

सरल करने पर तथा कुछ विमाहीन अंकों का प्रयोग करने पर हमें निम्नांकित समीकरण प्राप्त होते हैं -

$$\left[D^2 - a^2 - \frac{\sigma v}{\eta}\right]x = -\frac{Hd}{\eta}Dz \tag{3.1}$$

$$\left[D^2 - a^2 - \frac{\sigma v}{\eta}\right]H = -\frac{Hd}{\eta}DW \tag{3.2}$$

$$\left[D^2 - a^2 - \frac{\sigma v}{K_t}\right]T = -\frac{\beta d^2}{K_t}W \tag{3.3}$$

$$\left[D^2 - a^2 - \frac{\sigma v}{K_c}\right]C = -\frac{\beta' d^2}{K_c}W \tag{3.4}$$

$$\left[D^2 - a^2 - \sigma - \frac{d^2}{K}\right]Z = -\frac{\mu_e}{4\pi}\frac{Hd}{\rho_o v}DX - \frac{2\Omega d}{v}DW \quad (3.5)$$

$$\sigma v(D^2 - a^2)\left[D^2 - a^2 - \sigma - \frac{d^2}{K}\right]W + \frac{\sigma\mu_e}{4\pi}\frac{Hd}{\rho_o}(D^2 - a)DH - \frac{a^2d^4}{v}gf'(z)W$$

$$-a^2d^2\sigma g\alpha T + a^2d^2\sigma g\alpha' C = 2\sigma\Omega d^3 dz \quad (3.6)$$

और आगे सरलीकरण द्वारा तथा सीमान्त प्रतिबन्धों का उपयोग करने पर प्रमेय का हल प्राप्त हो जाता है।

## 4. विवेचना

(a) अप्रगामी संवहन

माना कि स्थिर संवहन में अस्थिरता चालू हो जाती है। सीमान्त अवस्था को $\sigma = 0$ द्वारा अभिलक्षित किया जाता है। समीकरण (3.1-3.6) में $\sigma = 0$ रखने पर

$$\left[D^2 - a^2\right]x = -\frac{Hd}{\eta}Dz \quad (4.1)$$

$$\left[D^2 - a^2\right]H = -\frac{Hd}{\eta}DW \quad (4.2)$$

$$\left[D^2 - a^2\right]T = -\frac{\beta d^2}{K_t}W \quad (4.3)$$

$$\left[D^2 - a^2\right]C = -\frac{\beta' d^2}{K_c}W \quad (4.4)$$

$$\left[D^2 - a^2 - \frac{d^2}{K}\right]Z = -\frac{\mu_e}{4\pi}\frac{Hd}{\rho v}DX - \frac{2\Omega d}{v}DW \quad (4.5)$$

$$\frac{a^2d^4}{v}gf'(z)W = 0 \quad (4.6)$$

समीकरण (4.6) का निहितार्थ है कि $W = 0$। समीकरण (4.1- 4.5) में $W = 0$ रखने पर हमें T, C, H, X तथा Z सभी शून्य के बराबर प्राप्त होते हैं। यह हमारी प्रारम्भिक अवस्था के विपरीत है अतः $\sigma$ शून्य के बराबर नहीं हो सकता।

(b) दोलनी संवहन

चूँकि अस्थिरता स्थिर संवहन में चालू नहीं हो सकती जैसा कि अनुभाग (a) में दर्शाया गया है, अतः अब हम दोलनी संवहन पर विचार करते हैं । दोलनी सीमान्त अवस्था की विशेषता है $\sigma = i\sigma'$ जहाँ $\sigma'$ वास्तविक है। अब समीकरण (3.1-3.5) को सरल करने से प्राप्त समीकरण में $\sigma = i\sigma'$ तथा $w = w_0 \sin \pi z$ रखने पर हम पाते हैं कि $\sigma'$ वास्तविक है यदि $f'(z)$ ऋणात्मक हो।

## निष्कर्ष

निष्कर्ष यह निकला कि अस्थिरता अस्थिर संवहन में चालू नहीं हो सकती अर्थात् अस्थिरता के विनिमय का सिद्धांत वैध नहीं है । यह भी निष्कर्ष निकाला जाता है कि दोलनी संवहन में अस्थिरता चालू नहीं हो सकती यदि घनत्व प्रवणता धनात्मक हो।

## निर्देश

1. भाटिया, पी.के. तथा स्टाइनर, जे. एम. : Jour. Math. Anal. And Appl.1973, 41, 271.
2. चन्द्रशेखर, एस. : Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press Oxford.(1961).
3. कोरे, ए. टी. : Mechanics of Heterogeneous fluid in Porous Media, Water Resources Publ.(1977).
4. ग्रीन, टी. : Phys. Fluids.1968, 11, 1410.
5. खरे, एच. सी. : The Mathematics Student 1999, 68 (1-4), 117-154.
6. नील्ड, डी. ए. : J. Fluid Mech.1967, 29, 545-558.
7. वेस्ट, सी. एम. तथा अर्पासी, वी. एस. : J. Fluid Mech.1969, 36, 613.

## शब्दावली

| | |
|---|---|
| Boundary. | परिसीमा/सीमान्त |
| Disturbance | विक्षोभ |
| Hydromagnetic | द्रवचुम्बकी |
| Limnology | सरोवर विज्ञान |

| | |
|---|---|
| Magnetic resistivity | चुम्बकीय प्रतिरोधकता |
| Normal Mode analysis | सामान्य मोड (बहुलक) विश्लेषण |
| Oscillatory | दोलनी |
| Overstability | अतिस्थायित्व |
| Perturbed Mode | क्षुब्ध अवस्था |
| Rectilinear components | सरलरेखी घटक |
| Rotating | घूर्णी |
| Thermohaline convection | थर्मोहेलाइन संवहन |
| Thermosolutal convection | थर्मोसोल्यूटी संवहन |
| Stationary | अप्रगामी/स्थिर |
| Solute | विलेय |
| Vertical magnetic field | ऊर्ध्वचुम्बकीय क्षेत्र |

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# प्रतानशीट तथा प्राकृतिक पारगम्य माध्यम से परिबद्ध चैनेल में MDH द्वितीय कोटिक तरल प्रवाह तथा उष्मा स्थानान्तरण

दिलीप सिंह चौहान तथा रितु घिया

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर ( राज0 )

[ प्राप्त — अप्रैल 15, 2002]

## सारांश

द्वितीय कोटिक तरल के अपरिवर्ती प्रवाह का अध्ययन अनुप्रस्थ चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में एक चैनेल के भीतर किया गया जो प्रतान शीट तथा अत्यल्प पारगम्यता वाले प्राकृतिक पारगम्य माध्यम से परिबद्ध है। ऊष्मा स्थानान्तरण का अध्ययन ऊपरी प्रतानशीट तथा निचले पारगम्य तल को विभिन्न तापों पर स्थिर रखते हुए भी किया गया । प्रवाह तथा ताप क्षेत्रों पर विभिन्न प्राचलों के प्रभावों की विवेचना की गई है।

## Abstract

**MHD second order fluid flow and heat transfer in a channel bounded by stretching sheet and a naturally permeable medium.** *By* Dileep Singh Chauhan and Ritu Ghiya, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur (Raj.).

The steady flow of a second order fluid is considered in a channel bounded by a stretching sheet and a naturally permeable medium of very small permeability in the presence of a transverse magnetic field. Heat transfer is also studied when the upper stretching sheet and the lower permeable bed are maintained at different temperatures. The effects of various parameters on the flow and temperature fields are discussed.

## 1. प्रस्तावना

सरंध्र माध्यम से होकर गैर-न्यूटनी तरलों का प्रवाह अनेक क्षेत्रों में - यथा रासायनिक संसाधन, जैव अभियांत्रिकी, पेट्रोलियम तथा पदार्थ प्रक्रमण में महत्वपूर्ण है। प्रतानशीट के कारण प्रवाह के अनेक अभियांत्रिक सम्प्रयोग हैं फलतः इस पर प्रचुर शोधकार्य हुआ है।[1-9]

प्राकृतिक रूप से पारगम्य पृष्ठ जिससे होकर तरल चूषित होता है उसके ऊपर से प्रवाह का अध्ययन महत्वपूर्ण है क्योंकि उच्च प्रवाह में परिसीमा नियन्त्रण तथा उष्मीय सुरक्षा के क्षेत्र में इसका व्यावहारिक सम्प्रयोग है।[10-11]

प्रस्तुत शोधकार्य का उद्देश्य द्वितीय कोटि के असंपीड्य, श्यान, विद्युच्चालक द्रव के उष्मा स्थानान्तरण तथा MHD प्रवाह का अध्ययन करना है। यह तरल प्रतानशीट तथा अत्यल्प पारगम्यता वाले प्राकृतिक रूप से पारगम्य तल के बीच है। यह तल अपारगम्य है और यहाँ पर स्थायी चूषण प्रवाह व्यवहृत किया जाता है। तरल-सरंध्र अन्तरापृष्ठ सैफमैन की सर्पण परिसीमा दशा प्रयुक्त की गई है।[1] उष्मा स्थानान्तरण का अध्ययन उस दशा के लिए किया गया है जब ऊपरी शीट तथा निचली पारगम्य तली विभिन्न तापों पर रखे जाते हैं। प्रवाह तथा ताप क्षेत्रों पर विभिन्न प्राचलों के प्रभावों की व्याख्या की गई है।

## प्रमेय का सूत्रण

हम एक श्यान, असंपीड्य, विद्युच्चालक द्वितीय कोटि के तल के दो विमीय अपरिवर्ती अप्रक्षुब्ध प्रवाह को एक चैनेल में से होकर जिसकी चौड़ाई h है और जो प्रतानशीट तथा परिमित मोटाई वाले प्राकृतिक रूप से पारगम्य तल से परिबद्ध है तथा जिसकी तली अपारगम्य है और जहाँ पर स्थिर चूषण वेग प्रयुक्त किया जा रहा है। प्रवाह का कारण रैखिक वेग से ऊपरी शीट का प्रतानन तथा निचले पारगम्य तल पर चूषण है । हमने X-अक्ष को सरन्ध पृष्ठ की दिशा में और Y-अक्ष को इसके लम्बवत् लिया है। प्लेट को दो समान किन्तु विपरीत बलों का प्रयोग करके ताना गया है जिससे बिन्दु (o,h) की स्थिति बदले नहीं । X-अक्ष के लम्बवत् स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र Bo लगाया गया है। प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र की उपेक्षा की गई है। किन्तु सरन्ध्र माध्यम की पारगम्यता से चैनेल में बाहरी प्रवाह सैफमैन के परिसीमा प्रतिबन्ध[11] के कारण प्रभावित होता है। निचले पारगम्य तल तथा ऊपरी प्रतानशीट को क्रमशः $T_0$ तथा $T_1$ तापों पर रखा गया है जिससे $(T_1 - T_0) > 0$

उपर्युक्त परिकल्पनाओं के अन्तर्गत प्रस्तुत प्रमेय को नियन्त्रित करने वाले समीकरण चुम्बकीय गतिकी हेतु संशोधित करते हुए इस प्रकार हैं -

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Bigg]+\varphi_3\left(8\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\right]-\sigma B_0^2 u \quad (1)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\varphi_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\varphi_2\left[\left(2\frac{\partial v}{\partial y}(5\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+3\frac{\partial v}{\partial x}\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$+\varphi_3[8\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg] \quad (2)$$

$$\rho cp\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]+\varphi_1\left[2\frac{(\partial u)^2}{\partial x}+2\frac{(\partial v)^2}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v)^2}{\partial x}\right]$$

$$+\phi^2\left[2u\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2v\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+u\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right.$$

$$\left.+v\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+v\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right]+\frac{J^2}{\sigma} \quad (3)$$

जहाँ $\frac{J^2}{\sigma}=\sigma B_0^2 u^2$ (ओमीय क्षय)

परिसीमा प्रतिबन्ध हैं :

$y=0$ पर $\tau_{yx}=\phi 1(\underline{\alpha})u, \quad v=-v_0, T=T_0$
$\quad K_0^{1/2}$

$y=h$ पर $u=cx, \quad c>0, \quad v=0, \quad T=T_1 \quad (4)$

यहाँ पर u, v क्रमशः x तथा y दिशाओं में वेग घटक हैं, p दाब है, ρ घनत्व है, σ तरल की विद्युत चालकता है, α नियंताक है, जो सरंध पदार्थ की संरचना पर निर्भर करता है, T चैनेल का ताप है, $c_p$ स्थिर ताप पर विशिष्ट उष्मा है, k उष्मीय चालकता है, $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ पदार्थ के नियतांक हैं, $\phi_1$ सामान्य श्यानता गुणांक, $\phi_2$ श्यानता गुणांक तथा $\phi_3$ तिर्यक श्यानता गुणांक हैं।

माना कि

$$u = cxf'(\eta), \quad v = -chf(\eta), \quad \eta = y/h \tag{5}$$

(1) तथा (2) में समीकरण (5) को प्रतिस्थापित करने तथा हल करने पर

$$f''' + R\{\varphi_2(2f'f''' - f^{iv} - f''^2) - f'^2 + ff''\} - M^2 f' = A \tag{6}$$

जहाँ $R = \dfrac{\rho ch^2}{\varphi_1}, \varphi_2 = \dfrac{\varphi_2}{\rho h^2}, \quad \varphi_3 = \dfrac{\varphi_3}{\rho h^2}$ तथा $M^2 = \dfrac{\sigma Bo^2 h^2}{\varphi_1}$

प्रवाह के लिए संगत परिसीमा प्रतिबंध हैं -

$$\eta = 0 \text{ पर } f''(0) + \phi_2 R(3f''(0)f'(0) - f(0)f'''(0) = \beta f'(0), \quad f(0) = \lambda$$

$$\eta = 1 \text{ पर } f''(1) = 1, f(1) = 0 \tag{7}$$

जहाँ $\lambda = \dfrac{v_0}{ch}$ तथा $\beta = \dfrac{\alpha h}{K_0^{1/2}}$

लघु R के लिए नियमित क्षोभ प्रारूप विकसित किया गया है जिसमें R के आरोही घातों में f तथा A का विस्तार निम्नवत् किया गया है -

$$f = \sum_{n=0} R^n f^n$$

$$A = \sum_{n=0} R^n A_n \tag{8}$$

इस विधि से सिद्धांततः हमें हल प्राप्त होता है यदि हम $R(n \geq 2)$ के उच्च घातों के गुणांकों की अवहेलना कर दें । अब समीकरण (7) में (8) को प्रतिस्थापित करके, R के समान घातों को समीकृत करके तथा संगत परिसीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हल करने पर

$$f_0 = a_1 - \frac{a_2 e^{(-M\eta)}}{M} + \frac{a_3 e^{(M\eta)}}{M} - \frac{A_0}{M^2}\eta \tag{9}$$

$$f_1 = a_4 - \frac{a_5 e^{(-M\eta)}}{M} + \frac{a_6 e^{M\eta}}{M} - \frac{A_1\eta}{M^2} + e^{M\eta}(k_1 + \eta k_4 + \eta^2 k_6)$$

$$+e^{-M\eta}(k_2 + \eta k_3 + \eta^2 k_5) + k_7\eta \qquad (10)$$

जहाँ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, A_0, A_1, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$,एवं $k_7$ अचरों को परिशिष्ट में दिया गया है। निम्नांकित अविमीय मात्राओं को प्रविष्ट करते हुए

$$\xi = \frac{x}{h}\ \overline{\phi}_1 = \frac{\phi}{\rho},\ \overline{u} = \frac{u}{\phi_1 / h},\ \overline{v} = \frac{v}{\phi_1 / h},\ \overline{\rho} = \frac{p}{\rho(\phi_1 h)^2}$$

हमें निम्नांकित के लिए व्यंजक प्राप्त होंगे

(i) धारा फलन

$$\psi = -R\xi f(\eta) \qquad (11)$$

(ii) सरंध्र संस्तर पर तथा प्रतानशीट पर उपरिस्तर का गुणांक

$$(C_f)_{\eta=0} = R\xi f''(0) + R^2\xi\overline{\phi_2}\{3f'(0)f''(0) - f(0)f'''(0)\} \qquad (12)$$

$$(C_f)_{\eta=1} = R\xi f''(1) + R^2\xi\overline{\phi_2}\{3f'(1)f''(1) - f(1)f'''(1)\} \qquad (13)$$

(iii) प्रवाह दिशा में दाब ह्रास

$$[\overline{P}(0,\eta) - \overline{p}(\xi,\eta)] = -\frac{R\xi^2}{2}[A + 2R\overline{\phi}_2(2\overline{\phi}_2 + \overline{\phi}_3)f''^2] \qquad (14)$$

माना कि ताप T का व्यंजक

$$T = To + \frac{c^2h^2}{Rc_p}[G(\eta) + \xi^2\overline{G}(\eta)] \text{ द्वारा दिया जाता है ।} \qquad (15)$$

(15) का उपयोग करने तथा $\xi^2$ के गुणांकों तथा $\xi$ से स्वतंत्र पदों की तुलना करने पर समीकरण (3)

$$\overline{G''} + R\,Pr[f\overline{G'} - 2f'G + 2f''^2 + \overline{\phi_2}R(f'f''^2 - ff''f''') + M^2f'^2] = 0 \qquad (16)$$

$$\overline{G''} + R\,Pr[f\overline{G'} + 4f'2 - 4\overline{\phi_2}Rf'f'f''] + 2\overline{G} = 0 \qquad (17)$$

में समानीत हो जाता है।

जहाँ $Pr = \frac{\phi_1 c_p}{k}$ (प्रेंड् संख्या)

हम अविमीय ताप को निम्नवत् परिभाषित करते हैं

$$\theta = \frac{T - To}{T_1 - T_0} = REc[G(\eta) + \xi^2 \overline{G}(\eta)] \qquad (18)$$

जहाँ $Ec = c^2h^2/cp(T_1 - T_0)$ (एकर्ट संख्या)

ताप के लिए संगत परिसीमा प्रतिबन्ध हैं -

$$\eta = 0 \text{ पर } \theta = 0$$

$$\eta = 1 \text{ पर } \theta = 1 \qquad (19)$$

लघु R के लिए G तथा $\overline{G}$ को निम्नवत् प्रसारित करते हुए

$$G = \sum_{n=0} R^n G_n,$$

$$\overline{G} = \sum_{n=0} R^n \overline{G_n}$$

समीकरण (16) तथा (17) में (20) को प्रतिस्थापित करने, R के समान घातों को समीकृत करने, संगत परिसीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हल करने तथा (18) का प्रयोग करने पर हमें अविमीय ताप निम्नवत् प्राप्त होता है -

$$\theta = \eta + R^2 Ec[G_1(\eta) + RG_2(\eta) + \xi^2\{\overline{G_1}(\eta) + R\overline{G}_2(\eta)\}]$$

$$= \eta + P_r R^2 Ec[G_1^{*}(\eta) + RG_2^{*}(\eta) + \xi^2\{G_1^{*}(\eta) + R\overline{G}_2^{*}(\eta)\}] \qquad (21)$$

जहाँ $G_1(\eta) = Pr\, G_1^{*}(\eta) = -Pr\{d_5\eta^2 + d_6\eta^3 + d_7\eta^4 + d_8 e^{(M\eta)}$

$$+d_9 e^{(-M\eta)} + d_{10} e^{(2M\eta)} + d_{11} e^{(2M\eta)} - c_8\eta - c_7\} \qquad (22)$$

$$\overline{G}_1(\eta) = Pr\, \overline{G}_1^{*}(\eta) = -Pr\{\eta^2 k_8 + k_9 e^{M\eta} + k_{10} e^{-M\eta} + k_{11} e^{2M\eta}$$

$$+k_{12} e^{-2M\eta} - (-c_6 - c_5)\eta - c_5\} \qquad (23)$$

$$G_2(\eta) = Pr\, G_2^{*}(\eta) = -Pr\{\frac{k_{61}}{2}\eta^2 + \frac{k_{41}}{6}\eta^3 + \frac{k_{42}}{12}\eta^4 + \frac{k_{43}}{20}\eta^5 + \frac{k_{44}}{30} k_{44} + e^{-M\eta}$$

$$(k_{72} + k_{74}\eta k_{76}\eta^2 + \frac{k_{51}}{M^2}\eta^3) + e^{M\eta}(k_{73} + k_{75}\eta + k_{77}\eta^2 + \frac{k_{52}}{M^2}\eta^3) + e^{-M\eta}$$

$$(k_{78}+k_{80}\eta+k_{82}\eta^2)+e^{2M\eta}(k_{79}+k_{81}\eta+k_{83}\eta^2)-c_{11}\eta-c_{12}\} \quad (24)$$

$$\overline{G_2}(\eta)=\Pr\overline{G2}^*(\eta)=-\Pr(k_{27}\eta^3+k_{28}\eta^2+e^{M\eta}(k_{29}+k_{34}\eta+k_{37}\eta^2)$$

$$+e^{-M\eta}(k_{30}+k_{33}\eta+k_{38}\eta^2)+e^{-2M\eta}(k_{32}+k_{36}\eta+k_{40}\eta^2)+e^{2M\eta}(k_{31}+k_{35}\eta+$$

$$k_{39}\eta^2)-c_{10}\eta-c_9\} \quad (25)$$

जहाँ $\phi, b_1, b_2, c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10} d_{11}$, $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, c_{12}, k_{27}, k_{28}, k_{29}, k_{30}, k_{31}, k_{32}, k_{33}, k_{34}, k_{35}$, $k_{36}, k_{37}, k_{38}, k_{39}, k_{40}, k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{44}, k_{51}, c_{52}, k_{61}, k_{72}, k_{73}, k_{74}, k_{75}, k_{76}, k_{77}$, $k_{77}, k_{78}, k_{79}, k_{80}, k_{81}, k_{82}, k_{83}$ अचरों को परिशिष्ट में दिया जा रहा है।

पारगम्य पृष्ठ पर उष्मा स्थानान्तरण की दर को

$$\frac{(\partial\theta)}{\partial\eta\ (\eta=0)}=1-\Pr R^2 Ec[M(d_8-d_9+2d_{10}-2d_{11}-R(k_{72}-k_{73}+2k_{78}-2k_{79})+\xi^2\{k_9-k_{10}+2k_{11}$$

$$-2k_{12}+R(k_{29}-k_{30}+2k_{31}-2k_{32})\}-c_8-Rc_{12}+\xi^2(c_5-c_6-Rc_{10})] \quad (26)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है । प्रतानशीट पर उष्मा स्थानान्तरण दर को

$$\frac{(\partial\theta)}{\partial\eta\ (\eta=1)}=1-\Pr R^2 Ec[2d_5+3d_6+4d_{7-c_8}+R(k_{61}+\frac{k_{41}}{2}+\frac{k_{42}}{3}+\frac{k_{43}}{4}+\frac{k_{44}}{5}-c_{11})+$$

$$+e^M\{Md_8+R(Mk_{73}+k_{75}-Mk_{75}+2k_{77}+Mk_{77}+\frac{3k_{52}-k_{52}M}{M^2})\}$$

$$+e^{-M}\{Md_9+R(-Mk_{72}+k_{74}-Mk_{74}+2k_{76}-Mk_{76}+\frac{3k_{51}-k_{51}}{M^2})\}$$

$$+e^{2M}\{2Md_{10}+R(2Mk'_{79}+k_{81}+2Mk_{81}+2k_{83}+2Mk_{83})\}$$

$$+e^{-2M}\{-2Md_{11}+R(-2Mk_{78}+k_{80}-2Mk_{80}+2k_{82}-2Mk_{82})\}$$

$$+3RMk_{84}e^{3M}-3RMk_{85}e^{-3M}]-\Pr R^2 Ec\xi^2[2k_8+c_5-c_6+R(3k_{27}+2k_{28}-c_{10})$$

$$+e^M\{Mk_9+R(Mk_{29}+k_{34}+Mk_{34}+2k_{38}+Mk_{38})\}+e^{-M}\{-Mk_{10}+R(-Mk_{30}+k_{33}$$

$$-Mk_{33}+2k_{37}-Mk_{37})\}+e^{2M}\{2Mk_{11}+R(2Mk_{31}+k_{35}+2Mk_{35}+2k_{39}+2Mk_{39})\}$$
$$+e^{-2M}\{-2Mk_{12}-R(2Mk_{32}-k_{36}+2Mk_{36}+2k_{40}+2Mk_{40})\} \qquad (27)$$

द्वारा दिया जाता है।

## विवेचना

प्राकृतिक रूप से पारगम्य परिसीमा की उपस्थिति में द्वितीय कोटि वाले तरल प्रवाह के आचरण की परीक्षा एक चैनेल (वाहिका) में की गई जो प्रतानशीट द्वारा परिबद्ध है। इस चैनेल में जो प्रवाह होता है वह ऊपर भित्ति के रैखिक वेग के साथ प्रतान तथा निचले सरंध्र तल पर चूषण के कारण है । चित्र 1 में प्रवाह रेखाएँ बताती हैं कि ऊपरी परिसीमा के निकट अक्षि पर तरल बाहर फेंक दिया जाता है और रिक्त स्थान को पूरा करने के लिए अनन्त दूरी से अक्ष की ओर तरल दौड़ता है। ऊपरी प्लेट के प्रतानित होने तथा निचले तल पर चूषण के कारण काफी दूरी पर मध्य तल के निकट विपरीत दाब प्रवणता उत्पन्न हो जाती है जिससे भीतर की ओर प्रवाह होने लगता है। मध्य तल के निकट धारा रेखा $\psi=0$ प्रवाह श्रेत्र को विभाजित कर देती है जिसमें यदि $\psi$ का मान धनात्मक होता है तो तरल ऊपरी भित्ति की ओर जाता है किन्तु यदि $\psi$ का मान ऋणात्मक हो तो तरल निचले सरंध्र तल की ओर गति करता है और बाहर चूष लिया जाता है।

चित्र 2 में विभिन्न प्राचलों के लिए चैनेल (वाहिका) की दोनों भित्तियों पर उपरिस्तर घर्षण के गुणांक के विचलन दर्शाए गये हैं। यह पाया गया कि उपरिस्तर घर्षण गुणांक $C_f$ का मान घट जाता है यदि पारगम्यता प्राचल $K_0$ बढ़ता है। यही नहीं, दोनों भित्तियों पर गैर-न्यूटनी प्राचल $\phi_2$ में वृद्धि होने से भी घर्षण गुणांक घटता है। किन्तु यदि प्रतान प्राचल R या चूषण प्राचल $\lambda$ में वृद्धि होती है तो यह भी बढ़ जाता है। चित्र 3 तथा चित्र 4 में ताप $\theta$ में होने वाले विचलन तथा दोनों भित्तियों पर उष्मा स्थानान्तरण दर्शाया गया है। यह देखा जाता है कि निचले सरंध्र तल की पारगम्यता बढ़ाने से या गैर न्यूटनी प्राचल $\phi_2$ का मान बढ़ाने से चैनेल में ताप $\theta$ बढ़ता है किन्तु चुम्बकीय क्षेत्र M में वृद्धि करने से यह बढ़ता है। यह भी पाया गया कि R या Pr में वृद्धि करने से यह बढ़ता है। ऊपरी भित्ति पर पारगम्यता प्राचल $K_0$ या गैरन्यूटनी प्राचल $\phi_2$ का मान बढ़ाने पर उष्मा स्थानान्तरण की दर घटती है जबकि निचली पारगम्य भित्ति पर M या R के बढ़ाने पर यह घटती है और $\phi_2$ या $K_0$ को किसी निश्चित प्रांडल संख्या तक बढ़ाने से यह बढ़ती है।

## निर्देश

1. मक कोर्मेक, पी. डी. तथा क्रेन, एल. : Physical fluid dynamics, पृष्ठ 272, Academic Press N.Y., (1973).
2. बोरकाकोटि, ए. के. तथा भराली, ए. : Quar. Appl. Math 1983, 40, 461.
3. वैंग, सी. वाई. : Phys.Fluids 1984, 27, 1915.
4. राजगोपाल, के. आर., ना, टी. वाई. तथा गुप्ता, ए. एस. : Rheol., Acta., 1984, 23, 213.
5. चार, एम. आई. तथा च्यू, सी. के. : Int. J. Heat mass transfer 1988,31, 917,
6. अहमद, एन., पटेल, जी. एस. तथा सिडप्पा, बी. : J. Appl. Math and Phys. (ZAMP) 1990, 41, 294.
7. सूर्मा देवी, सी. डी. तथा नाथ, जी : Indian J. Tech 1990, 28, 93.
8. चौहान, डी. एस. : AMSE Periodicals, Modelling, Measurement and Control, B. 1993, 47, 55..
9. ऐरेल, पी. डी. : Quart. Appl. Math 1995, 53, 629.
10. बीवर्स, जी. एस. तथा जोसेफ, डी. डी. : J. Fulid Mech. 1967, 30, 197.
11. सैफमैन, पी. जी. : Stud. Appl. Math. 1971, 50, 93.
12. ओ नील, एम. ई. तथा भट्ट, बी. एस. : Q. J. Mech. Appl. Math, 1991, 44, 91.
13. चौहान, डी. एस. तथा शेखावत, के. एस. : J. Phys. D. Appl. Phys. 1993, 26, 933.
14. चौहान, डी. एस. तथा व्यास, पी. : J. Engng. Mach., ASCE, 1995, 121, 57.
15. रुद्रैया, एन., कृष्णमूर्ति, बी. एस. तथा मासुओका, टी. : Proc. Indian Acad. Sci (Math. Sci.) 1997, 121, 57.
16. चौहान, डी. एस. तथा जाखड़, पी. के. : Indian J Theor. Phys. 1999, 47, 303.

## शब्दावली

| | |
|---|---|
| Boundary Condition. | परिसीमा प्रतिबन्ध |
| Channel | वाहिका/चैनल |
| Dissipation | क्षय |
| Laminar flow | अप्रक्षुब्ध प्रवाह |
| Magnetodynamics | चुम्बकगतिकी |
| Newtonian fluid | न्यूटनी तरल |
| Non-dimensional | अविमीय |
| Non-Newtionian fluid | गैर-न्यूटनी तरल |
| Permeable. | पारगम्य |
| Porous plate | सरंध्र प्लेट |
| Porous bed | सरंध्र संस्तर/तल |
| Pressure drop | दाब ह्रास |
| Perturbation | क्षोभ |
| Slip boundary | सर्पण परिसीमा |
| Skin friction cofficient | उपरिस्तर घर्षण गुणांक |
| Stream function | धारा फलन |
| Stretching sheet | प्रतान शीट |
| Steady flow | उपरिवर्ती प्रवाह |
| Suction fluid | चूषण तरल |
| Tangental flow | स्पर्शरेखीय प्रवाह |
| Temperature fields | ताप क्षेत्र |
| Transverse | अनुप्रस्थ |

# परिशिष्ट

$$a_1 = \frac{2a_2c_4 + b_2}{c_3}$$

$$a_2 = \frac{b_2c_3 + b_2c_1}{2(c_2c_3 - c_4c_1)}$$

$$a_3 = \lambda M - a_1M + a_2$$

$$a_4 = \frac{g_1q_1 + g_2p_1}{p_2q_1 - q_2p_1}$$

$$a_5 = \frac{g_2 + a_4q_2}{q_1}$$

$$a_6 = a_5a_4M - d_2M$$

$$A_0 = \lambda M^2e^2 + a_1M^2(1 - e^M) + 2a_2M \sinh M$$

$$b_1 = \lambda Me^M(1 - M) + M$$

$$b_2 = -\lambda M(\beta e^M + M^2 - M\beta$$

$$c_1 = M(Me^Me^M + 1)$$

$$c_2 = Me^{-M} + M \sinh M - \sinh M$$

$$c_3 = M(M\beta - M^2 + \beta - \beta e^M)$$

$$c_4 = M\beta - \beta \sinh$$

$$c_5 = k_9 + k_{10} + k_{11} + k_{12}$$

$$c_6 = k_8 + k_9e^M + k_{10}e^{-M} + k_{11}e^{2M} + k_{12}e^{-2M}$$

$$c_7 = d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11}$$

$$c_8 = d_5 + d_6 + d_7 + d_8(e^M - 1) + d_9(e^{\cdot M} - 1) + d_{10}(e^{2M} - 1) + d^{11}(e^{-2M} - 1)$$

$$c_9 = Pr\{k_{29} + k_{30} + k_{31} + k_{32}\}$$

$$c_{10} = Pr\{k_{27} + k_{28} + e^M(k_{29} + k_{34} + k_{38}) + e^{-M}(k_{30} - k_{33} + k_{37}) + e^{2M}(k_{31} + k_{35} + k_{39}) - c_9\}$$

$$c_{11} = Pr[\frac{k_{61}}{2} + \frac{k_{41}}{6} + \frac{k_{42}}{12} + \frac{k_{43}}{20} + \frac{k_{44}}{30} + e^{-M}(k_{72} + k_{74} + k_{76} + \frac{k_{51}}{M^2} + e^M(k_{73} + k_{75} + k_{75} + k_{77} + \frac{k_{52}}{M^2})$$

$$+e^{-2M}(k_{78}+k_{80}+k_{82})+e^{2M}(k_{79}+k_{81}+k_{83})+e^{3M}k_{84}+e^{-3M}k_{85}-c_{12}]$$

$$c_{12}=Pr[k_{72}+k_{73}+k_{78}+k_{79}]$$

$$d_1=e^{M}(k_1+k_4+k_6)+e^{-M}(k_2+k_3+k_5)+k_7$$

$$d_2=k_1+k_2$$

$$d_3=Me^{M}(k_1+k_4+k_6)-Me^{-M}(k_2+k_3+k_5)+e^{-M}(k_3+2k_5)+e^{M}(k_4+2k_6)+k_7$$

$$d_4=k_1(M\beta-M^2)-k_2(M\beta+M)+k_3(2M+\beta)+k_4(\beta-2M)-2k_5-2k_6+\beta k_7-\overline{\phi}_2\{2a_3^2M$$

$$-2a_2^2M-\frac{3a_3A_0}{M}+\frac{3a_3A_0}{M}-a_1a_2M^2-a_1a_3M^2\}$$

$$d_5=\frac{1}{2}(a_1\varphi+8a_2a_3+\frac{4A_0^2}{M^4}+2c_5)$$

$$d_6=\frac{1}{6}\{-\frac{A_0\varphi}{M^2}+2(c_6-c_5)\}$$

$$d_7=\frac{-k_8}{6}$$

$$d_8=\frac{1}{M^2}(a_3\frac{\varphi}{M}-\frac{8a_3A_0}{M^2}-2k_9)$$

$$d_9=\frac{1}{M^2}(a_2\frac{\varphi}{M}-\frac{8a_2A_0}{M^2}-2k_{10})$$

$$d_{10}=\frac{1}{4M^2}(4a_3^2-2k_{11})$$

$$d_{11}=\frac{1}{4M^2}(4a_2^2-2k_{12})$$

$$k_1=\frac{a_3a_3}{2M^2}+\frac{15a_3A_0}{8M^5}-\frac{a_1a_2\overline{\varphi}2}{2}+\frac{15}{8}\frac{a_3A_0}{M^3}\overline{\varphi}_2$$

$$k_2=\frac{a_1a_3}{2M^2}-\frac{15a_2A_0}{8M^5}-\frac{a_1a_2\overline{\varphi}2}{2}+\frac{15}{8}\frac{a_3A_0}{M^3}\overline{\varphi}_2$$

$$k_3 = \frac{a_1 a_3}{2M^2} - \frac{7}{4}\frac{a_2 A_0}{M^4} - \frac{a_1 a_2 M\overline{\varphi}2}{2} + \frac{7}{8}\frac{a_2 A_0\,\overline{\varphi}_2}{M^2}$$

$$k_4 = \frac{-a_1 a_3}{2M} - \frac{7}{4}\frac{a_3 A_0}{M^4} + \frac{a_1 a_3 M\overline{\varphi}_2}{2} + \frac{7}{4}\frac{a_3 A_0\,\overline{\varphi}_2}{M^2}$$

$$k_5 = \frac{a_2 a_0\,\overline{\varphi}_2}{2M} - \frac{a_2 A_0}{4M^3}$$

$$k_6 = \frac{a_3 A_0}{4M^3} - \frac{a_3 A_0 \phi^2}{4M}$$

$$k_7 = 8a_2 a_3 \overline{\phi}_2 - \frac{4a_2 a_3}{M^2} - \frac{A_0^2}{M^6}$$

$$k_8 = \frac{-a_2 A_0}{2} - \frac{a_3 A_0}{2} - \frac{A_0^2}{2M^2}$$

$$k_9 = \frac{-a_3 A_0}{M^2}$$

$$k_{10} = \frac{-a_2 A_0}{M^2}$$

$$k_{11} = \frac{a_3^2}{2}$$

$$k_{12} = \frac{a_2^2}{2}$$

$$k_{13} = -2\,Pr\,a_1 k_8 + Pr\,\frac{A_0 a_6}{M^2} - Pr\,\frac{A_0 c_5}{M^2} - 2M^2(2a_2 k_6 + 2a_3 k_5)$$

$$k_{14} = Pr\{4a_2 k_{11} - Ma_1 k_9 + a_3 \frac{c_6 - c_5 - 2}{M} a_3 c_5 - 2\frac{Pr A_0 k_9\}}{M^2} - 2M^2(a_3 k_7 - \frac{A_0 k_1}{M} - \frac{a_3 A_1 + A_0 a_6 + A_0 k_4)}{M^2}$$

$$k_{15} = Pr\{4a_2 k_{12} + Ma_1 k_{10} + a_2 \frac{c_5 - c_6)}{M} - 2a_2 c_5 - 2\frac{A_0 k_{10}\}}{M^2} + 2M^2(a_2 k_7 + \frac{A_0 k_2)}{M} - \frac{a_2 A_1 + A_0 a_5 + A_0 k_3)}{M^2}$$

$$k_{16} = Pr\{a_3(k_9 + 2M^3k_1 + 2M^2a_6 + 4M^2k_4 + 4Mk_6) - 2Ma_1k_{11} - \frac{2A_0k_{11}\}}{M^2}$$

$$-\overline{\varphi}_2a_3^2(A_0 + a_1M^3) + 2a_3M^2(a_6 + Mk_1 + k_4)$$

$$k_{17} = Pr\{a_2(k_{10} + 2M^3k_2 + 2M^2a_5 + 4M^2k_3 + 4Mk_5) - 2Ma_1k_{12} + \frac{2A_0k_{12}\}}{M^2}$$

$$-\overline{\varphi}_2a_2^2(a_1M^3 - A_0) + 2a_2M^2(a_5 + Mk_2 + k_3)$$

$$k_{18} = Pr\{a_1(c_6 - c_5) + 3a_2k_9 + 3a_3k_{10} + \frac{2A_0c_5\}}{M^2} + 2\overline{\varphi}_2a_2a_3A_0\} - 2M(Ma_3k_3 2a_3k_5$$

$$+a_2Mk_4 + 2a_2k_6\frac{A_1A_0}{M^3} + \frac{A_0k_7}{M}$$

$$k_{19} = Pr(2a_2(c_5 - c_6) + \frac{2a_2k_8 - A_0k_{10}}{M} + \frac{2MA_0(k_3 - 2k_5)}{M}$$

$$k_{20} = Pr(2a_3(c_5 - c_6) + \frac{A_0k_9 - 2a_3k_8\}}{M} - \frac{2MA_0(k_4 - 2k_6)}{M}$$

$$k_{21} = 4M^2a_3(k_4M + 3k_6) + \frac{2\,Pr\,A_0k_{11}}{M} + \overline{\varphi}_2Ma_3^2A_0$$

$$k_{22} = -4M^2a_2(Mk_3 - 3k_5) - \frac{2\,Pr\,A_0k_{11}}{M} + \overline{\varphi}_2Ma_2^2A_0$$

$$k_{23} = 2(Pr\,a_2k_8 + MA_0k_5)$$

$$k_{24} = 2(Pr\,a_3k_8 + MA_0k_5)$$

$$k_{25} = 4a_3M^3k_6$$

$$k_{26} = -4a_2M^3k_5$$

$$k_{27} = \frac{k_{13}}{6}$$

$$k_{28} = \frac{k_{18}}{2}$$

$$k_{29} = \frac{M^2k_{14} - 2Mk_{20} + 6k_{24}}{M^4}$$

$$k_{30} = \frac{M^2 k_{15} + 2Mk_{19} + 6k_{23}}{M^4}$$

$$k_{31} = \frac{2M^2 k_{16} - 2Mk_{21} + 3k_{25}}{8M^4}$$

$$k_{32} = \frac{2M^2 k_{17} - 2Mk_{22} + 3k_{26}}{8M^4}$$

$$k_{33} = \frac{Mk_{19} - 4k_{23}}{M^3}$$

$$k_{34} = \frac{Mk_{20} - 4k_{24}}{M^3}$$

$$k_{35} = \frac{Mk_{21} - 2k_{25}}{4M^3}$$

$$k_{36} = \frac{Mk_{22} - 2k_{26}}{4M^3}$$

$$k_{37} = \frac{k_{23}}{M^2}$$

$$k_{38} = \frac{k_{24}}{M^2}$$

$$k_{39} = \frac{k_{25}}{4M^2}$$

$$k_{40} = \frac{k_{26}}{4M^2}$$

$$k_{41} = -\Pr(2a_1 d_5 + \frac{A_0 c_8)}{M^2} + \varphi(k_7 - \frac{A_1}{M^2} + 8(Ma_2 k_4 + 2a_2 k_6 - Ma_3 k_3 + 2a_3 k_5) + 2c_{10}$$

$$k_{42} = \Pr \frac{(2A_0 d_4)}{M^2} - 3a_1 d_6) + 2(4a_2 k_6 M - 4a_3 k_5 M - k_{28}$$

$$k_{43} = \Pr (\frac{3A_0 d_6}{M^2} - 4a_1 d_7) + 2k_{27}$$

$$k_{44} = \frac{4\,Pr\,A_0 d_7}{M^2}$$

$$k_{45} = Pr(Ma_1 d_9 + 2a_3 d_{11} - \frac{a_2 c_8)}{M} + \frac{\varphi(k_2 - A_5)}{M} + \frac{2(4a_2 k_7 - 4a_2 A_1 + 4a_5 A_0 + 4A_0 k_3}{M^2}$$

$$+ \frac{4A_0 k_2}{M} - k_{30}) + 4\overline{\varphi}_2 a_2 (a_3 a_2 - \frac{a_1 A_0)}{M}$$

$$k_{46} = Pr(2a_2 d_{10} + Ma_1 d_8 - \frac{a_3 c_8)}{M} + \frac{\varphi(k_1 - A_6)}{M} + 2(4a_3 k_7 - \frac{4a_3 A_1 + 4a_6 A_0 + 4A_0 k_4}{M^2}$$

$$\frac{4A_0 k_1}{M} - k_{29}) + 4\overline{\varphi}_2 a_3 (a_2 a_3 - \frac{a_1 A_0)}{M}$$

$$k_{47} = Pr(2\frac{a_2 d_5 - A_0 d_9)}{M} + k_3 \varphi - 2k_{33} + 8A_0 (\frac{Mk_4 + 2k_6)}{M^2} - \frac{4\overline{\varphi}_2 a_3 A_0^2}{M^3}$$

$$k_{48} = Pr(\frac{A_0 d_8 - 2a_3 d_5)}{M} + k_4 \varphi - 2k_{34} + 8A_0 (\frac{Mk_4 + 2k_6)}{M^2} - \frac{4\overline{\varphi}_2 a_3 A_0^2}{M^3}$$

$$k_{49} = \frac{8A_0 k_5}{M} + \frac{3\,Pr\,a_2 d_6}{M} + k_5 \varphi - 2k_{37}$$

$$k_{50} = k_6 \varphi - 2k_{38} - \frac{3\,Pr\,a_3 d_6 + 8A_0 k_6}{M}$$

$$k_{51} = \frac{4\,Pr\,a_2 d_7}{M}$$

$$k_{52} = \frac{-4\,Pr\,a_3 d_7}{M}$$

$$k_{53} = Pr(2Ma_1 d_{11} - a_2 d_9) + 2(4a_2 a_5 - 4a_2 Mk_2 + 4a_2 k_3 - k_{32}) + 4\overline{\varphi}_2 a_2^2 \frac{(4M^3 a_1 + A_0)}{M}$$

$$k_{54} = -Pr(2Ma_1 d_{10} - a_3 d_8) + 2(4a_3 a_6 + (4a_3 Mk_1 + 4a_3 k_4 - k_{31}) + 4\overline{\varphi}_2 a_3^2 \frac{(A_0 - a_1 M^3)}{M^2}$$

$$k_{55} = \frac{-2\,Pr\,A_0 d_{11}}{M} + 8a_2(2k_5 - Mk_3) - 2k_{36} \frac{4\overline{\varphi}_2 a_2^2 A_0}{M}.$$

$$k_{56}=\frac{2\,Pr\,A_0 d_{10}}{M}+8a_3(Mk_4-2k_6)-2k_{35}+\frac{4\overline{\varphi}_2 a_3^2 A_0}{M}$$

$$k_{57}=-2(k_{40}+4a_2k_5M)$$

$$k_{58}=-2(4a_3k_6M-k_{39})$$

$$k_{59}=-2(2a_3^3\overline{\varphi}_2+Pr\,a_3d_{10})$$

$$k_{60}=-2(2a_2^3\overline{\varphi}_2+Pr\,a_2d_{11})$$

$$k_{61}=Pr(a_1c_8+a_2d_8+a_3d_9)+4a\varphi+2c_9+8(a_2c_6+a_2Mk_1-a_3Mk_2+a_2k_4+a_3a_5+a_3k_3+\frac{A_1A_0}{M^4}-\frac{A_0k_7)}{M^2}-\frac{8\overline{\varphi}_2a_2a_3A_0}{M^2}$$

$$k_{62}=\frac{-k_{45}}{M}-\frac{k_{47}}{M^2}-\frac{2k_{49}}{M^3}-\frac{6k_{51}}{M^4}$$

$$k_{63}=\frac{M_3k_{46}-M^2k_{48}+2Mk_{50}-6k_{52}}{M^2}$$

$$k_{64}=\frac{-M_2k_{47}-2Mk_{49}-6k_{51}}{M^3}$$

$$k_{65}=\frac{-M^2k_{48}-2Mk_{50}-6k_{52}}{M^3}$$

$$k_{66}=\frac{-Mk_{49}-3k_{51}}{M^2}$$

$$k_{67}=\frac{Mk_{50}-3k_{52}}{M^2}$$

$$k_{68}=\frac{-2M^2k_{53}-Mk_{55}-k_{57}}{4M^3}$$

$$k_{69}=\frac{2M^2k_{54}-Mk_{56}+k_{58}}{4M^3}$$

$$k_{70}=\frac{-Mk_{55}-k_{57}}{2M^2}$$

$$k_{71} = \frac{-Mk_{56} - k_{58}}{2M^2}$$

$$k_{72} = \frac{-M^4k_{62} - M^3k_{64} - 2M^2k_{66} + 6k_{51}}{M^5}$$

$$k_{73} = \frac{M^4k_{63} - M^3k_{65} + 2M^2k_{67} + 6k_{52}}{M^5}$$

$$k_{74} = \frac{-M^3k_{64} - 2M^2k_{66} + +6k_{51}}{M^4}$$

$$k_{75} = \frac{M^3k_{65} - 2M^2k_{67} + 6k_{52}}{M^4}$$

$$k_{76} = \frac{3k_{51} - M^2k_{66}}{M^3}$$

$$k_{77} = \frac{M^2k_{67} - 3k_{52}}{M^3}$$

$$k_{78} = \frac{-4M^3k_{68} - 2M^2k_{70} + k_{57}}{8M^4}$$

$$k_{79} = \frac{4M^3k_{69} - 2M^2k_{71} + k_{58}}{8M^4}$$

$$k_{80} = \frac{k_{57} - 2M^2k_{70}}{4M^3}$$

$$k_{81} = \frac{2M^2k_{71} - k_{58}}{4M^3}$$

$$k_{82} = \frac{k_{57}}{4M^2}$$

$$k_{83} = \frac{k_{58}}{4M^2}$$

$$k_{84} = \frac{k_{59}}{9M^2}$$

$$k_{85} = \frac{k_{60}}{9M^2}$$

$$g_1 = d_4 + d_2(M^2 - \beta M) - \frac{\beta M}{M-1} d_1 + d_3 \frac{\beta}{M-1}$$

$$g_2 = d_1 \frac{M}{M-1} + 1 d_2 M e^M - d_3 \frac{M}{M-1}$$

$$p_1 = 2\beta + \frac{2\beta e^{-M}}{M-1}$$

$$p_2 = M\beta + \frac{M\beta}{M-1} - M^2$$

$$q_1 = e^M + e^{-M} + \frac{2e^{-M}}{M-1}$$

$$q_2 = Me^M + \frac{M}{M-1}$$

ψ= -1.55295
ψ = -0.93177
ψ = -0.31059
ψ= 0.31059
ψ= 0.93177
ψ= 1.55295
ψ = 0
η
ψ = 0.31059
ψ = 0.93177
ψ = 1.5529
ψ= - 0.31059
ψ = -0.93177
ψ= - 1.5529
ξ

M R Ko Φ2 λ
I 1.5 0.1 .0001 -0.1 0.1
II 1.5 0.1 .001 -0.1 1
III 0.5 0.1 .0001 -0.1 1
IV 1.5 0.1 .0001 0 1
V 1.5 0.1 .0001 -0.1 1
VI 1.5 0.2 .0001 -0.1 1
Cf
ξ
Cf(η=1)
Cf(η=0)

M R Pr φ2 K0
I 1.5 0.1 0.5 -0.1 .001
II 1.5 0.1 0.5 0 .0001
III 1.5 0.1 0.5 -0.1 .0001
IV 2.5 0.1 0.5 -0.1 .0001
V 1.5 0.1 1.5 -0.1 .0001
VI 1.5 0.2 0.5 -0.1 .0001
non- newtonian
newtonian
η
θ
M R φ2 K0
I 1.5 0.15 -0.1 0.0001
II 2 0.1 -0.1 0.0001
III 1.5 0.1 -0.1 0.0001
IV 1.5 0.1 0 0.0001
V 1.5 0.1 -0.1 0.001
∂θ/∂η0
Pr
∂θ/∂η (η=0)
∂θ/∂η (η=1)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# मैट्रिक्स आर्गुमेंट के हम्बर्ट फलन

**ललित मोहन उपाध्याय**

**गणित विभाग, म्यूनिसिपल पोस्टग्रेजुएट कालेज, मसूरी, देहरादून (उत्तरांचल)**

**तथा**

**एच. एस. धामी**

**गणित विभाग, कुमायूँ विश्वविद्यालय, अलमोड़ा (उत्तरांचल)**

[ प्राप्त — फरवरी 16, 2003]

**सारांश**

प्रस्तुत प्रपत्र में मैट्रिक्स अर्गुमेंट के हम्बर्ट फलनों $\phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2$ तथा $\equiv 1$ से सम्बद्ध पाँच परिणामों की स्थापना की गई है।

**Abstract**

**Humbert's functions of matrix arguments.** *By* Lalit Mohan Upadhyaya, Department of Mathematics, Municipal Post Graduate College, Mussoorie, Dehradun (Uttaranchal) and H. S. Dhami, Department of Mathematics, University of Kumaun, Almora campus, Almora.

Five results concerning the Humbert's functions $\phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2$ and $\equiv 1$ of matrix arguments have been established in this paper.

## प्रस्तावना

इसके पूर्व मथाई ने [4, 5, 6] मैट्रिक्स आर्गुमेंट के हम्बर्ट फलनों का अध्ययन मैट्रिक्स आर्गुमेंटों के अपेल फलनों के साथ मिला कर किया है। किन्तु यहाँ पर हमने मैट्रिक्स अर्गुमेंट के अपेल फलनों के किसी सन्दर्भ के बिना हम्बर्ट फलनों के कतिपय गुणों का स्वतंत्र रूप से अध्ययन करने का प्रयास किया है। इस शोधपत्र में आने वाले समस्त मैट्रिक्स (pxp) वास्तविक संमित धन निश्चित मैट्रिक्स हैं और अन्य समस्त संकेतों के अर्थ वे ही हैं जो मथाई के शोधपत्रों में[3, 4,] हैं ।

## 1. परिभाषाएँ

हम अपने पूर्ववर्ती दो प्रपत्रों में [9,10] मैट्रिक्स आर्गुमेंटों के हम्बर्ट फलनों की मथाई द्वारा दी गई परिभाषाएँ दे चुके हैं। यहाँ पर उस एक परिभाषा को दिया जावेगा, जिसे हम नहीं दे पाये। अन्य परिभाषाएँ, जिनकी आवश्यकता हमें इस प्रपत्र में पड़ेगी, उनके विषय में यथास्थान निर्देश किये जावेंगे।

### परिभाषा 1.1 : मैट्रिक्स आर्गुमेंट

$$\phi_3 = \phi_3(b;c;-X,-Y)$$

का हम्बर्ट $\phi_3$ फलन फलनों के उस वर्ग के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसके लिए मैट्रिक्स रूपान्तर (M-रूपान्तर) निम्नवत् है -

$$M(\phi_3) = \int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\phi_3(b;c;-X,-Y)dXdY$$

$$= \frac{\Gamma_p(c)\Gamma_p(b-\rho_1)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(b)\Gamma_p(c-\rho_1-\rho_2)} \qquad (1.1)$$

$Re(b-\rho_1, c-\rho_1-\rho_2, \rho_1, \rho_2) > (p-1)/2$ के लिए

## 2. परिणाम

### प्रमेय 2.1

$$|P|^{-\beta}\Xi_1(\alpha,\alpha',\beta;\gamma;-P^{-1/2}XP^{-1/2},-Y)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(\beta)}\int_{T>0} e^{-tr(PT)}|T|^{\beta-(p+1)/2}\phi_2(\alpha,\alpha';\gamma-T^{1/2}XT^{1/2},-Y)dT \qquad (2.1)$$

$Re(\beta) > (p-1)/2$ के लिए

**उपपत्ति :**

समीकरण (2.1) के दक्षिण पक्ष को $X$ तथा $Y$ चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर हमें

$$\int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\phi_2(\alpha,\alpha';\gamma;-T^{1/2}XT^{1/2},-Y)dXdY$$

प्राप्त होता है। रूपान्तर

$$X_1 = T^{1/2}XT^{1/2} \text{ के साथ } dX_1 = |T|^{(p+1)/2}dx \text{ एवं } |X_1| = |T||X|$$

को व्यवहृत करने तत्पश्चात् उपाध्याय तथा धामी[10] का उपयोग करने पर उपर्युक्त व्यंजक से

$$|T|^{-\rho_1} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\alpha-\rho_1)\Gamma_p(\alpha'-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\alpha')\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \quad (2.3)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (2.1) के दक्षिण पक्ष में इस व्यंजक को रखने पर तथा परिणामी व्यंजक में गामा समाकल का प्रयोग करने पर T को समाकलित करने पर

$$|P|^{-(\beta-\rho_1)} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\alpha-\rho_1)\Gamma_p(\alpha'-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)\Gamma_\rho(\beta-\rho_1)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \quad (2.4)$$

प्राप्त होता है। अब समीकरण (2.1) के वाम पक्ष का X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर हमें

$$\int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}|P|^{-\beta}\Xi_1(\alpha,\alpha',\beta;\gamma;-P^{-1/2}XP^{-1/2},-Y)dXdY \quad (2.5)$$

प्राप्त होता है जो रूपान्तर के अन्तर्गत

$$X_2 = P^{-1/2}XP^{-1/2}, \text{ साथ ही } dX_2 = |P|^{-(p+1)/2}\, dX \text{ एवं } |X_2| = |P|^{-1}|X|$$

तत्पश्चात् लेखकों के[10] समीकरण (1.2) का उपयोग करने पर वही परिणाम प्रदान करता है जो उपर्युक्त समीकरण (2.4) में है।

**प्रमेय 2.2**

$$|P|^{-\gamma}\left|I+P^{-1/2}XP^{-1/2}\right|^{-\beta}\left|I+P^{-1/2}YP^{-1/2}\right|^{-\beta'}$$

$$=\frac{1}{\Gamma_p(\gamma)}\int_{T>0} e^{-tr(PT)}|T|^{\gamma-(p+1)/2}\phi_2(\beta,\beta';\gamma-T^{1/2}XT^{1/2},-T^{1/2}YT^{1/2})dT \quad (2.6)$$

क्योंकि $Re(\gamma)>(p-1)/2$

**उपपत्ति :**

समीकरण (2.6) के दक्षिण पक्ष का X तथा Y अचरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर

$$\int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\phi_2(\beta,\beta';\gamma-T^{1/2}XT^{1/2},-T^{1/2}YT^{1/2})dXdY \quad (2.7)$$

समीकरण (2.2) की तरह उसी रूपान्तर को Y चर के लिए वैसे ही रूपान्तर के सम्प्रयोग से तथा लेखकों के शोधपत्र[10] के समीकरण (1.1) का उपयोग करने पर अन्तिम व्यंजक से

$$|T|^{-\rho_1-\rho_1}\frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\beta'-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\beta')\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \tag{2.8}$$

प्राप्त होता है। इस व्यंजक को समीकरण (2.6) के दक्षिण पक्ष में प्रतिस्थिापित करने पर और परिणामी व्यंजक में गामा समाकल का उपयोग करते हुए T को समाकलित करने पर

$$|P|^{-(\gamma-\rho_1-\rho_2)}\frac{\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\beta'-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\beta')} \tag{2.9}$$

अब समीकरण (2.6) के वाम पक्ष में X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर

$$\int_{X>0}\int_{Y>0}|X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}|P|^{-\gamma}\left|I+P^{-1/2}XP^{-1/2}\right|^{\beta}\left|I+P^{-1/2}YP^{-1/2}\right|^{\beta'}dXdY \tag{2.10}$$

इसी रूपान्तर को समीकरण (2.5) के लिए समीकरण (2.10) में Y चर के लिए वैसे ही रूपान्तर के साथ उपयोग करने पर तथा टाइप-2 बीटा समाकल का उपयोग करके समाकलन के नये चरों को समाकलित करने पर हमें समीकरण (2.9) के समान ही परिणाम प्राप्त होता है ।

**प्रमेय 2.3**

$$|P|^{-\beta'}\phi_2(\beta\ \beta';\gamma;-X-P^{-1/2}YP^{-1/2})$$

$$=\frac{1}{\Gamma_p(\beta')}\int_{T>0}e^{-tr(PT)}|T|^{\beta'-(p+1)/2}\phi_3(\beta;\gamma;-X-T^{1/2}-YT^{1/2})dT \tag{2.11}$$

क्योंकि $Re(\beta')>(p-1)/2$

**उपपत्ति :**

समीकरण (2.11) के दक्षिण पक्ष में X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर

$$\int_{X>0}\int_{Y>0}|X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\phi_3(\beta;\gamma;-X-T^{1/2}YT^{1/2})dxdy \tag{2.12}$$

रूपान्तर $Y_1=T^{1/2}YT^{1/2}$ का प्रयोग करने, तत्पश्चात् परिभाषा (1.1) का उपयोग करने से हमें उपर्युक्त व्यंजक से

$$|T|^{-\rho_2}\frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \tag{2.13}$$

प्राप्त होता है जो समीकरण (2.11) के दक्षिण पक्ष में रखे जाने तथा परिणामी व्यंजक में गामा समाकल का प्रयोग करके T को समाकलित करने पर

$$|P|^{-(\beta'-\rho_2)} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\beta'-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\beta')\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \tag{2.14}$$

प्राप्त होता है। अब रूपान्तर X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति समीकरण (2.11) के वाम पक्ष का M-रूपान्तर लेने पर हमें

$$\int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}|P|^{-\beta}\phi_2(\beta;\beta';\gamma;-X,P^{-1/2}YP^{-1/2})dXdY \tag{2.15}$$

प्राप्त होता है जो रूपान्तर $Y_2 = P^{-1/2}YP^{-1/2}$ का संप्रयोग करने और फिर उपाध्याय तथा धामी[10] के समीकरण (1.1) का प्रयोग करने पर ऊपर समीकरण (2.14) में दिया गया परिणाम प्रदान करता है।

**प्रमेय 2.4 :** $p = 2$ के लिए

$$|P|^{-\alpha}\Xi_1[(\alpha+1)/2,\beta,(2\alpha+1)/4;\gamma;-4P^{-1}YP^{-1},-X]$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}\int_{T>0} e^{-tr(PT)}|T|^{\alpha-(p+1)/2}\phi_3(\beta;\gamma;-X-TYT')dT \tag{2.16}$$

जहाँ $Re(\alpha) > (p-1)/2$

**उपपत्ति :**

समीकरण (2.16) के दक्षिण पक्ष में X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति M-रूपान्तर लेने पर

$$\int_{X>0}\int_{Y>0} |X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\phi_3(\beta;\gamma;-X-TYT')dXdY \tag{2.17}$$

रूपान्तर $Y_1 = TYT'$ के साथ $dY_1 = |T|^{p+1}dY$ एवं $|Y_1| = |T|^2|Y|$ का प्रयोग करने और परिभाषा (1.1) का प्रयोग करने पर उपर्युक्त व्यंजक से

$$|T|^{-2\rho_2} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \tag{2.18}$$

प्राप्त होता है। समीकरण (2.16) के दक्षिण पक्ष में इस व्यंजक को प्रतिस्थापित करने तथा उसके बाद गामा समाकल का प्रयोग करते हुए परिणामी व्यंजक में T को समाकलित करने पर

$$|P|^{-(\alpha-2\rho_2)} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\beta-\rho_1)\Gamma_p(\alpha-2\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\gamma-\rho_1-\rho_2)} \tag{2.19}$$

अब X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति समीकरण (2.6) के वाम पक्ष का M-रूपान्तर लेने पर हमें

$$\int_{X>0}\int_{Y>0}|X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}|P|^{-\alpha}\,\Xi_1(\alpha+1)/2,\beta,(2\alpha+1)/4;\gamma;\\ -4P^{-1}YP^{-1},-X)dXdY \tag{2.20}$$

प्राप्त होता है जो रूपान्तर

$Z_1=4P^{-1}YP^{-1}$ के साथ $dZ_1=4^{p(p+1)/2}|P|^{-(p-1)}dY$ एवं $|Z_1|=4^p|P|^{-2}|Y|$ के अन्तर्गत एवं उपाध्याय तथा धामी[10] के शोधपत्र के समीकरण का उपयोग करने के साथ ही $p=2$ के लिए प्रेक्षण सहित

$$4^{-p\rho_2}\frac{\Gamma_p[(\alpha+1)/2-\rho_2]\Gamma_p[(2\alpha+1)/4-\rho_2]}{\Gamma_p[(\alpha+1)/2]\Gamma_p[(2\alpha+1)/4]}=\frac{\Gamma_p(\alpha-2\rho_2)}{\Gamma_p(\alpha)} \tag{2.21}$$

[समीकरण (6.13) पृष्ठ 84] मथाई[3] से वही परिणाम प्राप्त होता है जो ऊपर के समीकरण (2.19) में है। यह परिणाम अदिश सन्दर्भ में संगत परिणाम से भिन्न है।

**प्रमेय 2.5**

$$|P|^{-\beta}\psi_1(\alpha,\beta;\gamma;\gamma';-P^{-1/2}XP^{-1/2},-Y)$$
$$=\frac{1}{\Gamma_p(\beta)}\int_{T>0}e^{-tr(PT)}|T|^{\beta-(p+1)/2}\psi_2(\alpha;\gamma;\gamma';-T^{1/2}XT^{1/2}-Y)dT \tag{2.22}$$

क्योंकि $Re(\beta)>(p-1)/2$

**उपपत्ति :**

समीकरण (2.22) के दक्षिण पक्ष में M-रूपान्तर को X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति लेने पर

$$\int_{X>0}\int_{Y>0}|X|^{\rho_1-(p+1)/2}|Y|^{\rho_2-(p+1)/2}\psi_2(\alpha;\gamma;\gamma';-T^{1/2}XT^{1/2}-Y)dXdY \tag{2.23}$$

समीकरण (2.2) की ही भांति उसी रूपान्तर को व्यवहृत करने तथा उपाध्याय और धामी[9] के शोधपत्र के समीकरण (1.7) का उपयोग करने पर उपर्युक्त व्यंजक से

$$|T|^{-\rho_1}\frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\gamma')\Gamma_p(\alpha-\rho_1-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)}{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\gamma-\rho_1)\Gamma_p(\gamma'-\rho_2)} \tag{2.24}$$

प्राप्त होता है जिसे समीकरण (2.22) के दक्षिण पक्ष में प्रतिस्थापित करने पर तथा तब परिणामी व्यंजक में गामा समाकल का प्रयोग करके T को समाकलित करने पर

$$|P|^{-(\beta-\rho_1)} \frac{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_p(\gamma')\Gamma_p(\alpha-\rho_1-\rho_2)\Gamma_p(\rho_1)\Gamma_p(\rho_2)\Gamma_\rho(\beta-\rho_1)}{\Gamma_p(\beta)\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\gamma'-\rho_2)\Gamma_p(\gamma-\rho_1)} \qquad (2.25)$$

प्राप्त होता है। यही परिणाम समीकरण (2.22) के वाम पक्ष के M-रूपान्तर को X तथा Y चरों तथा $\rho_1$ एवं $\rho_2$ प्राचलों के प्रति लेने पर तत्पश्चात् उसी रूपान्तर को समीकरण (2.5) की ही तरह व्यवहृत करने पर प्राप्त होता है।

## निर्देश


1. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि : Tables of Integral Transforms, Vol. 1, McGraw Hill, New York, Toronto and London (1954)
2. एक्सटन, एच. : Multiple Hypergeometric Functions and Applications, Ellis Horwood Limited, Publishers, Chichester.(1976).
3. मथाई, ए. एम. : Jacobians of Matrix Transformations I, Centre for Mathmatical Sciences, Trivandrum, India.(1992).
4. मथाई, ए. एम. : Hypergeometric Functions of Several Matrix Arguments, Centre for Mathematical Sciences, Trivandrum, India (1993)
5. वही : Linear Algebra Appl. 1993, 183, 201-221
6. वही : Proc. Natl. Acad. Sci. India Sect. A Phys. Sci. 1995 LXV(IV), 367-393
7. श्रीवास्तव,एच. एम. तथा कार्लसन, पी. डब्लू. : Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Ellis Horwood Limited, Publishers, Chichester. (1985)
8. उपाध्याय, ललित मोहन तथा धामी, एच. एस. : IMA Preprint Series, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A. Nov. 2001 #1818
9. वही : IMA Preprint Series, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A. Mar. 2002 #1848
10. वही : IMA Preprint Series, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A. Apr. 2002 #1853

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# फुलवारी वन्यजीव अभयारण्य उदयपुर एवं आस-पास के टेरिडोफाइट

सतीश कुमार शर्मा

वन्यजीव अभयारण्य फुलवारी, कोटडा, जिला - उदयपुर (राज.)

[ प्राप्त — मई 3, 2003]

सारांश

दक्षिण अरावली में स्थित फुलवारी, सज्जनगढ़ एवं जयसमंद वन्यजीव अभयारण्य तथा बाघदड़ा शिकार निषिद्ध क्षेत्रों में 11 प्रजातियों के टेरिडोफाइटा की उपस्थिति दर्ज की गई। इनमें सर्वाधिक 11 जातियाँ फुलवारी वन्यजीव अभयारण्य में पाई गई हैं।

**Abstract**

**Pteridophytic flora of Phulwari Wildlife Sanctuary Udaipur and adjacent area.** *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Phulwari Wildlife Sanctuary, Kotra, Dist. Udaipur (Raj.)

Phulwari, Sajjangarh and Jaisamand Wildlife Sanctuaries and Baghdarah closed area are situated in southern Aravallis. As many as 11 Pteridophytic species were listed from these four protected areas during the present survey. A maximum of 11 species were recorded from Phulwari Wildlife Sanctuary.

दक्षिण राजस्थान में कुंभलगढ़, फुलवारी, सीतामाता,जयसमंद, सज्जनगढ तथा माउन्ट आबू पाँच अभयारण्य एवं मेनाल तथा बाघदडा शिकार निषिद्ध क्षेत्र स्थित हैं । सीतामाता अभयारण्य अरावली एवं विध्याचल पर्वतमाला के संगम पर स्थित है। शेष चारों अभयारण्य दक्षिण अरावली में हैं। बाघदडा शिकार निषिद्ध क्षेत्र भी अरावली पर्वतमाला में स्थित है।

राजस्थान के फर्नों की अच्छी जानकारी भारद्वाज तथा साथीगण [1], मित्तल[6],रोलन[7] तथा यादव[9] के कार्यों से मिलती है। कुंभलगढ अभयारण्य में परशुराम महादेव सघन वनों वाला क्षेत्र तो है ही, यहाँ झरने एवं जल स्रोतों के कारण नमी का वातावरण भी उपलब्ध है। इस क्षेत्र की फर्नों

की जानकारी भारद्वाज तथा साथीगण[1] के कार्य से और कुंभलगढ की फर्नों की जानकारी यादव[7] के कार्य से मिलती है। माउन्ट आबू अभयारण्य एवं आस-पास के क्षेत्र की फर्नों की जानकारी भारद्वाज तथा साथीगण[1,2], गैना तथा भारद्वाज[3], मैक केन[5], मित्तल[6], रोलन[7], यादव[9], आदि के कार्यों से मिलती है। उदयपुर के कुछ संरक्षित क्षेत्रों की फर्न तथा फर्न संश्रित (fern and fern allies) की जानकारी शर्मा[8] के कार्य से मिलती है। माउन्ट आबू राजस्थान का सर्वाधिक फर्नबहुल क्षेत्र है। इस क्षेत्र में वैज्ञानिकों ने व्यापक सर्वे कार्य किया है।

उदयपुर जिले में उमरा, उदयसागर,.हल्दीघाटी तथा भीलवाड़ा जिले की भुनास खानों ($25^0$ 13'30'':$74^0$ 22'30'') के फर्नों की जानकारी जैन के कार्य से मिलती है।[4]

उपर्युक्त सन्दर्भो व अन्य स्रोतों का अध्ययन करने पर स्पष्ट हो जाता है कि दक्षिण राजस्थान के फुलवारी, सज्जनगढ़ एवं जयसंमद अभयारण्यों तथा बाघदड़ा शिकारनिषिद्ध क्षेत्र के फर्नों पर जानकारी सीमित है अतः विस्तृत अध्ययन करने हेतु इन क्षेत्रों को विशेष रूप से चुना गया।

## प्रयोगात्मक

दक्षिण राजस्थान के अरावली क्षेत्र के फुलवारी, सज्जनगढ़ एवं जयसमन्द अभयारण्यों में वर्ष 1993 से 2002 तक टेरिडोफाइटों का सर्वे किया गया परन्तु फुलवारी अभयारण्य क्षेत्र में विशेष सघन सर्वे किया गया क्योंकि यहाँ नम आवासों की अधिक उपलब्धता होने से फर्नों के मिलने की अधिक संभावना थी। फुलवारी अभयारण्य में कोटडा, मामेर एवं पानरवा तीन रेंजें आती हैं। इन तीनों के वन क्षेत्र पर पर्याप्त ध्यान दिया गया। स्थानीय वनकर्मियों, वन सुरक्षा एवं प्रबंध समितियों के सदस्यों के साथ संरक्षित क्षेत्रों के प्रवाहमान नालों, झरनों, एनीकटों, बाँधों, नहरों आदि का सर्वे किया गया। वर्षा ऋतु में सर्वे कार्य पर विशेष ध्यान दिया गया। राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर एवं मोहनलाल सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर के फर्न विशेषज्ञों से पौधों की पहचान सुनिश्चित की गई। भारद्वाज एवं गैना जैसे फर्न वैज्ञानिकों से फर्न प्रजातियों की पहचान को सुनिश्चित कराया गया। अभयारण्य के कोटड़ा रेंज कार्यालय पर फर्नों का हर्बेरियम भी विकसित किया गया। अनेक प्रजातियों को वन विभाग के अरावली औषधीय उद्यान, नाल सांडोल (झाडोल) में सूक्ष्म जलवायु सृजित कर के उगाया गया एवं स्थान से बाहर (Ex-situ) कन्जर्वेशन की पहल की गई।

## परिणाम तथा विवेचना

सर्वे के दौरान फुलवारी वन्यजीव अभयारण्य, उदयपुर एवं इसके आस-पास के संरक्षित क्षेत्रों, सज्जनगढ़, जयसमन्द एवं बागदड़ा, में जो टेरिडोफाइटा वर्ग के पौधे देखे गये, उनकी सूची सारणी 1 में अंकित है।

**सारणी - 1 :** फुलवारी अभयारण्य व आस-पास के वन क्षेत्रों के टेरिडोफाइटा वर्ग के पौधे एवं उनकी उपस्थिति

| क्र. | कुल | प्रजाति का नाम | उपस्थिति का विवरण | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | फुलवारी अभयारण्य | सज्जनगढ़ अभयारण्य | जयसमंद अभयारण्य | बाघदड़ा शिकार निषिद्ध क्षेत्र |
| 1. | सिलैजिनेलैसी | Selaginella sp. | + | - | - | - |
| 2. | इक्वीसिटेसी | Equisetum sp. | ++ | - | - | - |
| 3. | औफियोग्लॉसैसी | Ophioglossum costatum | + | - | - | - |
| 4. | मार्सीलियेसी | Marsilea minuta | +++ | - | +++ | ++ |
| 5. | एडीएन्टेसी | Adiantum lunulatum | +++ | - | - | - |
| | | A. capillus-veneris | ++ | - | - | ++ |
| | | A. coudatum | +++ | +++ | +++ | ++ |
| 6. | कीलेन्थेसी | Cheilanthes tenuifolia | ++ | - | - | - |
| 7. | टेरीडेसी | Actinopteris radiata | +++ | +++ | +++ | +++ |
| 8. | सैलवीनियेसी | Azolla pinnata | + | - | +++ | + |
| 9. | थैलिप्टेरीडेसी | Ampelopteris prolifera | + | - | - | - |
| | योग | | 11 | 2 | 4 | 5 |

* + उपस्थित, ++ बहुलता से उपस्थित, +++ अत्यधिक बहुलता से उपस्थित,
- सर्वे के दौरान नहीं देखी गई या अनुपस्थित

**सिलेजीनेला प्रजाति :**

सिलेजीनेला जाति के फर्न को वर्षा ऋतु में फुलवारी अभयारण्य की पानरवा रेंज के फुलवारी वन खण्ड में ईको-रेस्टोरेशन प्लान्टेशन वर्ष 2000 के क्षेत्र में, पश्चिमी ढाल पर उगा पाया गया। जहाँ फर्न उगा था वहाँ मिट्टी में काफी नमीं थी तथा ऊपर खिरनी के वृक्षों की छाया थी। आस-पास कोई बहने वाला बरसाती नाला नहीं था।

राजस्थान में सिलेजीनेला वंश की अभी तक दो जातियां देखी गई हैं - सी. रिपैन्डा व सि. राजस्थानेन्सिस । कोटा जिले में गैपरनाथ तथा चित्तौड़गढ़-उदयपुर जिले में फैले सीतामाता

अभयारण्य में सि. रिपैन्डा ज्ञात है जबकि बाराँ जिले में कुंडाखोह (शाहबाद) में सि. राजस्थानेन्सिस ज्ञात है (रोलन[7])। उपर्युक्त सभी ज्ञात स्थान अरावली श्रंखला से पूर्व दिशा में विंध्याचल एवं आस-पास स्थित हैं। फुलवारी अभयारण्य में सिलेजीनेला फर्न की अरावली पर्वत श्रंखला क्षेत्र में यह प्रथम उपस्थिति है जिसकी जाति पहचान करना शेष है।

**औफियोग्लोसम कॉस्टेटम :**

वर्षा ऋतु में यह फर्न फुलवारी अभयारण्य की मामेर रेंज के महाद-दौतड़ क्षेत्र में महुओं के नीचे नम भूमि पर उगा देखा गया।

**मार्सीलिया माइन्यूटा :**

फुलवारी अभयारण्य में मार्सीलिया माइन्यूटा पूरी वाकल नदी में जगह-जगह बहुलता से उगने वाली जलीय फर्न प्रजाति है। इस फर्न को गर्मी ऋतु में भी नदी के उन गड्ढों में बहुलता से देखा जा सकता है जिनमें सालभर पानी भरा रहता है। मार्सीलिया फर्न खाँचन से लुहारी की बीच नालों में तथा पानरवा से कोटडी के बीच नालों में जगह-जगह बहुलता से विद्यमान है। पानी में तैरते फर्न के पत्तों का आकार बड़ा होता है परन्तु सूखने पर पत्तों का आकार घट जाता है तथा पत्रकों की कोर भी दन्तुर हो जाती है।

मर्सीलिया फर्न जयसमंद अभयारण्य में जयसंमद झील एवं इसके निचले बहाव क्षेत्र में भी विद्यमान है। इस फर्न को बाघदड़ा शिकारनिषिद्ध क्षेत्र में स्थित झील में भी देखा जा सकता है।

**इक्वीसीटम प्रजाति :**

यह प्रजाति वाकल नदी के किनारे जगह जगह मिलती है। सर्वाधिक संख्या में यह रामकुण्डा झरने के पास मिलती है। रामकुण्डा में यह प्रजाति फ्रेगमाइटीज ऑस्ट्रेलिस के साथ मिश्रित अवस्था में उगती है। इस प्रजाति को ओडा के पास मानसी नदी में भी उगते हुए देखा गया है।

**एडीएन्टम कैपिलस-वेनेरिस :**

फुलवारी अभयारण्य में यह फर्न नियमित बहने वाले नालों में, जहाँ स्पंजी चट्टानें विद्यमान हैं, साल भर हरी-भरी अवस्था में मिलता है। फुलवारी में इस फर्न को नालवा, कटावली,जेर एवं भीलडीमाता के पास के नालों में देखा गया है। फुलवारी की परिधि पर स्थित खोखरिया की नाल, अक्यावड़, भीमा की झोली, सौन्द्रफ, कमलनाथ आदि जगह भी इस फर्न को देखा गया है। फुलवारी अभयारण्य की परिधि पर कोटड़ा कस्बे में वन विभाग की पौधशाला की एक चूने से चिनाई की गई नाली में भी इस फर्न को उगते देखा गया है।

इस फर्न को बाघदड़ा शिकारनिषिद्ध क्षेत्र में बांध की दीवार की, निचले बहाव वाली सतह [down stream surface of dam] पर सघनता व बहुलता से उगते देखा गया है।

यह फर्न बहुत जलप्रिय है। यह स्पन्जी चट्टानों के अलावा नम दीवारों पर भी उग सकता है। इस फर्न को राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर की नर्सरी के कुएं में आन्तरिक दीवार पर तथा राजस्थान के थार रेगिस्तान के इन्दिरा गांधी नहर के शीर्षों [Heads] पर नम दीवारों पर भी उगते हुए देखा गया है।

**एन्डीएन्टम लुनुलेटम :**

फुलवारी अभयारण्य में वर्षा ऋतु में इस फर्न को हर जगह नम स्थानों पर देखा जा सकता है। वर्षा समाप्ति के बाद मिट्टी सूखने पर यह फर्न भी सूख जाता है।

**एन्डीएन्टम कॉडेटम :**

यह फर्न फुलवारी, सज्जनगढ़ तथा जयसमंद तीनों अभयारण्यों एवं बाघदड़ा निषिद्ध क्षेत्र में बहुलता से उगता है। यह अपेक्षाकृत खुले क्षेत्रों में भी देखा जा सकता है तथा सूखे को अच्छी तरह सहन कर लेता है। गर्मी की ऋतु में भी यदि अच्छी वर्षा हो जाये तो यह फर्न तुरन्त हरा-भरा हो जाता है।

**कीलेन्थीज टिनुईफोलिया :**

यह फर्न वर्षा ऋतु में नम, खड़ी चट्टानों या सड़क के किनारे मिट्टी लेने हेतु काटे गये खड़े तटों पर, नम स्थानों में बहुलता से उगता है। इस फर्न की निचली सतह पर सफेद पाउडर जैसा लगा रहता है। आदिवासी ग्वाले इस फर्न के पत्तों से गोदना (Tattoo) बनाने हेतु शरीर पर पत्तों को रखकर हथेली से दबा देते हैं जिससे पत्तों का अस्थाई सफेद प्रिन्ट शरीर पर उभर आता है।

**एक्टीनोप्टेरिस रेडियेटा :**

यह फर्न चारों संरिक्षत क्षेत्रों में बहुलता से विद्यमान है। यह खुले स्थानों, खड़ी चट्टानों व दीवारों पर आमतौर पर देखा जाता है। यह सूखे को अच्छी तरह सहन कर लेता है। यह फर्न तथा एडीएन्टम कॉडेटम साथ-साथ उगते हैं। एडीएन्टम कॉडेटम की तरह गर्मी में अच्छी वर्षा हो जाने पर सूख चुका एक्टोनोप्टेरिस एडियेटा भी तुरन्त हरा-भरा हो जाता है।

एडीएन्टम कॉडेटम तथा एक्टीनोप्टेरिस रेडियेटा दोनों ऐसे फर्न हैं जो साथ-साथ उत्तरी अरावली में सुदूर स्थित नाहरगढ़ अभयारण्य तक में भी उगते हैं। नाहरगढ़ फुलवारी की तुलना में एक बहुत शुष्क अभयारण्य है। नाहरगढ़ में इसकी उपस्थिति दर्शाती है कि ये दोनों ऐसे फर्न हैं जो सूखे को आसानी से सहन कर लेते हैं तथा पूरी अरावली में उत्तर से दक्षिण तक समान रूप से उगते हैं।

**एजोला पिन्नेटा :**

यह जलीय फर्न है जो बाँधों के पानी में तैरता नजर आता है। फुलवारी में इस फर्न को

बक्सा का नाका बाँध में देखा गया। यह फर्न जयसमंद झील व बाघदड़ा झील में भी मिलता है। एजोला फर्न फुलवारी की उत्तरी सीमा के पास स्थित सेई बाँध में भी मिलता है।

**एमपिलोप्टेरिस प्रोलीफेरा :**

यह फर्न फुलवारी अभयारण्य में अभी तक भीलड़ीमाता के पास मात्र एक नाले में ही देखा गया है। यह नाला पूरे साल बहता है तथा यह फर्न पानी के किनारे साल भर हरा-भरा नजर आता है। भीलड़ीमाता नाले में अर्द्ध सदाबहार वनस्पतियों का बाहुल्य है तथा वितान घनत्व (Canopy density) 0.8 से 1.0 तक होने से साल भर शीतलता व छाया बनी रहती है। यह फर्न लम्बाई में काफी बढ़ जाता है तथा नाले के पूरे पाट में सघनता से फैल जाता है। भीलड़ीमाता के समकक्ष पारिस्थितिकीय आवास वाले फुलवारी के अन्दर एवं परिधि के वन क्षेत्र में रामकुण्डा, कटावली जेर, गामडी की नाल, भडेर बावसी, पानरवा - मान्डवा नाला आदि निरन्तर प्रवाहित होने वाले नालों में यह फर्न अनुपस्थित है। वाकल नदी में हालांकि पानी जगह-जगह बहता रहता है लेकिन वहाँ भी यह फर्न नहीं है। यह देखा गया है कि प्रवाहमान चौड़े पाट के नालों की बजाय प्रवाहमान सँकरे पाट (narrow water-bed) वाले नाले,जिनके किनारों पर छायादार वृक्ष होते हैं, वहाँ यह फर्न बहुलता से उगता है। सीतामाता अभयारण्य में सीतामाता मन्दिर के पास सँकेरे नालों में तथा करमोई नदी के सँकरे बहाव क्षेत्र में छायादार वृक्षों के नीचे यह फर्न बहुलता से मिलता है।

## निष्कर्ष

शर्मा ने[8] पूर्व में फुलवारी,सज्जनगढ़ एवं जयसमंद अभयारण्यों में क्रमशः 6, 2 एवं 2 फर्न प्रजातियों की सूचना दी थी लेकिन प्रस्तुत अध्ययन में अब यहाँ क्रमशः 11,2, एवं 4 प्रजातियों की उपस्थिति दर्ज हुई है। दक्षिण अरावली में फुलवारी, सज्जनगढ़ एवं जयसमंद अभयारण्य तथा बाघदड़ा शिकार निषिद्ध क्षेत्र में टैरिडोफाइटा की सर्वाधिक 11 जातियाँ फुलवाड़ी अभराण्य में मिलती हैं। यह अभयारण्य आस-पास के अन्य संरक्षित क्षेत्रों के मुकाबले अधिक नमी वाला क्षेत्र है तथा इसमें प्रवाहमान नालों व झरनों की जगह-जगह उपलब्धता है जो फर्नों हेतु उपयुक्त आवास साबित होते हैं। सिलेजिनेला, औफियोग्लोसम कॉस्टेटम तथा एम्पिलोप्टेरिस प्रोलिफेरा इस क्षेत्र के अपेक्षाकृत दुर्लभ फर्न हैं। एम्पिलोप्टेरिस प्रोलीफेरा फर्न अभी तक राजस्थान में केवल बारां जिले में सीताबाड़ी एवं चित्तौड़गढ़-उदयपुर जिले में स्थित सीतामाता अभयारण्य में ही ज्ञात है। फुलवारी इस फर्न की राजस्थान में तीसरी ज्ञात जगह के रूप में अंकित हो गई है (सी. बी. गैना, निजी पत्राचार, 2002)। सीतामाता में यह फर्न सीतामाता मंदिर वाले नाले तथा करमोई नदी के दोनों किनारों पर छायादार वृक्षों के नीचे दूर-दूर तक बहुलता से विद्यमान है। वहाँ नालों में पानी की अधिकता तथा किनारे पर छाया देने वाली वनस्पतियों की अच्छी सघनता है जबकि फुलवारी में यह फर्न बहुत सीमित क्षेत्र में नाले में लगभग 0.9 किमी लम्बाई में ही विद्यमान है। यहाँ जल बहाव

भी कम है अतः भीलडीमाता नाले की पारिस्थितिकीय अवस्थाओं को ज्यों का त्यों बनाये रखना जरूरी है। इस कार्य में भीलडीमाता नाले के कैचमैन्ट में जल व मृदा संरक्षण उपाय तथा नाले की तट वनस्पतियों की पूर्ण सुरक्षा जरूरी है।

बाघदडा क्षेत्र में झील के बाँध के नीचे के बहाव में (पूर्व दिशा में) नाले में एम्पिलोप्टेरिस प्रोलीफेरा फर्न के उगाने की आदर्श स्थितियाँ उपलब्ध हैं । ऐसी ही स्थितियाँ सज्जनगढ़ अभयारण्य में झर महादेव के पास भी उपलब्ध हैं। इन दोनों जगहों पर इस फर्न को उगाया-बचाया जा सकता है हाँलाकि इस कार्य हेतु पहले पारिस्थितिकीय दृष्टि से पूर्ण सोच-विचार की जरूरत है।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा. एस.एस. कटेवा, डा. छाया भटनागर, श्री आर. जी. सोनी, श्री अरुण सेन, श्री एम. एल. मीना, श्री राहुल भटनागर, श्री आई. पी. एस. मथारू, श्री पी. एस. चुण्डावत, श्री लक्ष्मण परमार एवं श्री हरेन्द्र सोलंकी का आभारी है जिनके सहयोग व प्रेरणा से उक्त अध्ययन संभव हुआ।

लेखक डॉ. टी. एन. भारद्वाज, डॉ. सी. बी. गैना एवं डॉ. बी. एल. चौधरी का बहुत आभारी है जिनके सहयोग से अनेक फर्नों की पहचान सुनिश्चित हो सकी।

## निर्देश

1. भारद्वाज, टी. एन.,यादव, ए. के. तथा रैना, सी. बी. : JBNHS, 1978, 75, 533-35
2. भारद्वाज, टी. एन., गैना, सी. बी.,टिक्कड, टी.,कौर, आर. तथा वधवानी, सी. : JBNHS, 1981, 73(3), 639-641
3. गैना, सी. बी. तथा भारद्वाज,टी. एन. : JBNHS, 1984, 81(1), 165-168
4. जैन, जी. एस. : पी-एच. डी. थीसिस, मोहनलाल सुखाड़िया विश्वविद्यालय उदयपुर, 1996
5. मैन कैन, सी. : JBNHS, 1946, 43, 641-47
6. मित्तल, पी. एल. : JBNHS, 1969, 66, 31-42
7. रोलन, बी. एल. : पी-एच. डी. थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर 1992.
8. शर्मा, सतीश कुमार : An overview of the pteridophytic flora of some protected areas of Rajasthan, 2002, 185-190-. In P.C. Trivedi (ed.) Advances in Pteridology.
9. यादव, बी. एल. : पी-एच. डी. थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर 1983

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# औद्योगिक बहिःस्राव का तोरई के बीज अंकुरण और वृद्धि पर प्रभाव

सुमन गुप्ता, रुद्रा गुप्ता, विधान चतुर्वेदी तथा दीनानाथ शुक्ल
वनस्पति विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[ प्राप्त — मई 30, 2003]

## सारांश

इलाहाबाद के मवैया नाला से प्रदूषित जल के नमूने एकत्र करके उसके भौतिक-रासायनिक गुण यथा ताप, पीएच, विद्युतचालकता, घुलित आक्सीजन, जीव रासायनिक आक्सीजन मांग, रासायनिक आक्सीजन मांग, कार्बन डाइ आक्साइड, कार्बनिक कार्बन, कुल घुलित ठोस, कुल नाइट्रोजन, नाइट्रेट नाइट्रोजन, कार्बोनेट, बाइकार्बोनेट, क्लोराइड, फास्फेट, पोटैसियम, कैल्सियम, आयरन, कॉपर, जिंक और मैंगनीज ज्ञात किये गये हैं । इस बहिःस्राव का प्रभाव तोरई प्रजाति पूसा के अंकुरण और वृद्धि पर ज्ञात किया गया।

## Abstract

**Effect of industrial effluent on seed germination and seedling growth of Ghia torai.** *By* Suman Gupta, Rudra Gupta, Vidhan Chaturvedi and Dina Nath Shukla, Department of Botany, University of Allahabad, Allahabad (U.P.)

Industrial effluent collected from Mawaia Nala at Allahabad was analysed for physicochemical properties viz temperature, pH, electrical conductance, dissolved oxygen, biochemical oxygen demand, chemical oxygen demand, carbon dioxide, organic carbon, total dissolved solids, total nitrogen, nitrate nitrogen, carbonate, bicarbonate, chloride, phosphate, patassium, calcium, iron, copper, zinc and manganese. Luffa cylindrica var. Pusa chikni was selected for the study of the effect of this industrial effluent on seed germination and seedling growth.

भारत विश्व के दस प्रमुख उभरते हुए औद्योगिक देशों में से एक है। पर्यावरण प्रदूषण औद्योगिक एवं विकासीय क्रियाकलाप का एक अवांछित अतिरिक्त प्रभाव है। घरेलू और औद्योगिक दोनों प्रकार के स्रोतों से निष्कासित निरर्थक पदार्थों का निष्कासन एक गम्भीर समस्या है। अधिकांश शहरों में निरर्थक एवं अपशिष्ट पदार्थ की मात्रा वहाँ पर उपलब्ध "निरर्थक पदार्थ निष्कासन सुविधा" के परिप्रेक्ष्य में बहुत अधिक है। औद्योगिकीकरण के कारण अत्यधिक विषैले धातुओं जैसे जिंक, पारा, कैडमियम का स्तर जैविक वातावरण में बढ़ रहा है। उनकी विषाक्तता का अध्ययन पौधों के परिप्रेक्ष्य में महत्वपूर्ण है क्योंकि पौधे भोजन श्रृंखला के प्रथम उत्पाद हैं अतः इनके द्वारा इन विषैली धातुओं के अवशोषण और एकत्रीकरण के कारण अनेक रोग हो सकते हैं।

भारी धातु-प्रदूषण के सम्भावित विपरीत एवं विषैले प्रभावों का काफी अध्ययन किया जा चुका है। इन अध्ययनों से पता चला है षष्टसंयोजक क्रोमियम पौधों और जन्तुओं के लिये विष है। मिश्रा तथा पवन कुमार ने[1] अध्ययनों में पाया कि कुछ भारी धातुएं (कैडिमियम और क्रोमियम) पौधों के लिये आवश्यक नहीं हैं परन्तु ये पौधों द्वारा शीघ्रता से अवशोषित होकर संचित कर ली जाती हैं। कई प्रजाति के पौधे जैसे एलाइसम, डाइकोमा और होमलियम 'निकिल संग्रह करने वाले पौधों' के नाम से जाने जाते हैं। इनकी जैवसंवर्धन क्षमता निकिल-बहुल भूमि में 100 गुना अधिक होती है।

पिछले अध्ययनों से यह सुझाव दिया गया है कि यदि औद्योगिक अवमल को छोड़ दिया जाये तो भी घरेलू अवमल में भी भारी धातुएँ पायी जाती हैं । यही नहीं, भारी धातुएँ पौधों द्वारा अवशोषित होकर उनकी उपापचय क्रियाओं को प्रभावित करती हैं और पौधों की कोशिकाओं में एकत्रित होकर भोजन श्रृंखला में प्रवेश करती हैं।

## प्रयोगात्मक

एकत्रित औद्योगिक बहिःस्राव का भौतिक-रासायनिक विश्लेषण किया गया। पानी का रंग भूरा लिये हुए काला एवं गंध ऐल्कोहल जैसी तीक्ष्ण थी। इसका ताप 15.5°C से 31.0°C तक था। अतः औसत ताप 24.7°C लिया गया। न्यूनतम पी.एच. 7.7 और अधिकतम 8.9 पाया गया। (सारणी - 2)

औद्योगिक बहिःस्राव की औसत वार्षिक विद्युतचालकता 543.8 म्यू मोज/सेमी0 पायी गयी। अकार्बनिक कार्बन का निर्धारण वाकले और ब्लैक विधि से किया गया। घुलित आक्सीजन 8.0 पी.पी.एम. से 9.3 पी.पी.एम. तक परिवर्तित होते देखी गयी (औसत घुलित आक्सीजन 8.7 पी.पी.एम.)। जीव रासायनिक आक्सीजन मांग की न्यूनतम और अधिकतम मात्राएँ क्रमशः 5.8 पी.पी.एम. और 7.2 पी.पी.एम. थीं (औसत मान 6.4 पी.पी.एम.)। रासायनिक आक्सीजन मांग को निर्धारित करने के लिये रिफ्लक्स विधि का प्रयोग किया गया। रासायनिक आक्सीजन मांग की

न्यूनतम मांग 7.4 पी.पी.एम तथा अधिकतम 8.2 पी.पी.एम (औसत मान 7.9 पी.पी.एम) मापी गयी। $CO_2$ के न्यूनतम, अधिकतम और औसत मान क्रमशः 1.8 पी.पी.एम.,9.1 पी.पी.एम और 3.9 पी.पी.एम पाये गये। कुल ठोस का निर्धारण वाष्पन विधि से और विसरित ठोस का निर्धारण गूच क्रुसिबल से किया गया। (सारणी-2)

माइक्रोजेल्डाल विधि के प्रयोग से कुल नाइट्रोजन का न्यूनतम मान 5.4 पी.पी.एम. और अधिकतम मान 138.8 पी.पी.एम. (औसत मान 68.4 पी.पी.एम) पाया गया।

फीनाल डाइसल्फोनिक अम्ल विधि के प्रयोग से नाइट्राइट; नाइट्रेट, यूरिया और अमोनिया-N का विश्लेषण किया गया। कार्बोनेट के अधिकतम और औसत मान क्रमशः 11.0 और 4.4 पी.पी.एम. पाये गये। क्लोराइड मान के लिए मोहर विधि का उपयोग किया गया।

स्टैनस क्लोराइड विधि के प्रयोग से फॉस्फेट एवं फ्लेम फोटोमीटर से Na और $K_2O$ का निर्धारण किया गया। Ca + Mg का अनुमापन EDTA के साथ किया गया जबकि कैल्सियम का निर्धारण आक्सैलेट विधि से किया गया। Mg का मान Ca +Mg के मान से Ca का मान घटाकर प्राप्त किया। पोटैसियम के न्यूनतम और अधिकतम मान क्रमशः 28.4 पी.पी.एम. और 54.2 पी.पी.एम. पाये गये। ज़िंक के न्यूनतम, अधिकतम और औसत मान क्रमशः 0.4, 0.5 और 0.6 पी.पी.एम. प्राप्त हुए।

इलाहाबाद की मृदा मुख्यतः जलोढ़ है तथा संरचना चिकनी-दोमट है। मृदा नमूनों का पीएच सिस्ट्रोनिक्स डिजिटल मीटर के रिफरेन्स एवं ग्लास इलेक्ट्रोड के द्वारा मृदा और आसुत जल (1:5) के निलम्बन में मापा गया। मृदा नमूनों में कार्बनिक कार्बन का निर्धारण वाक्ले और ब्लैक के तीव्र अनुमापन विधि से किया गया। (सारणी-1)

मृदा नमूनों में फास्फेट का निर्धारण ए.ओ.ए.सी. विधि से, कुल नाइट्रोजन का निर्धारण जेल्डाल विधि से किया गया। उदासीन सामान्य अमोनियम ऐसीटेट का प्रयोग विनिमेय धनायनों के निष्कर्षण के लिए किया गया।

प्रदूषित जल का सान्द्रण 0, 5,10, 25, 50, 75 और 100 प्रतिशत रखा गया। अक्लोरीनीकृत जल को नियंत्रक के रूप में प्रयोग किया गया।

24 घंटे के लिये बीजों को मवैया नाला के विभिन्न सान्द्रण के समान आयतन पेट्रीडिश में रखे गये। फिर बीजों को दूसरी गीले फिल्टर पेपर युक्त (15 ml. विलयन में विभिन्न सान्द्रण के भीगा फिल्टर पेपर) पेट्रीडिश में अंधेरे में $27 \pm 2^0C$ ताप पर रखा गया और एक हफ्ते तक अंकुरित होने दिया। एक हफ्ते बाद बीज का अंकुरण प्रतिशत, प्राथमिक जड़ और तने की लम्बाई, ताजे और शुष्क भार को भी नोट किया गया।

**सारणी - 1 मृदा के भौतिक-रासायनिक गुणधर्म**

| क्रमांक | गुणधर्म | |
|---|---|---|
| 1. | रचना | चिकनी-दोमट |
| 2. | पी एच. | 7.5 |
| 3. | C. E. C. | 25 (c mol kg (p[1]) |
| 4. | विद्युतचालकता | 0.75 dsm-1 |
| 5. | कार्बनिक कार्बन | 1.72% |
| 6. | कार्बनिक पदार्थ | 2.07% |
| 7. | कुल नाइट्रोजन | 0.057% |
| 8. | कुल फास्फोरस | 1% |
| 9. | कुल कैल्सियम | 3.8% |
| 10. | जिंक (डी॰टी॰पी॰ए॰) | 2.08 ppm |
| 11 | कॉपर (डी॰टी॰पी॰ए॰) | 2.50 ppm |
| 12. | आयरन | 20.0 ppm |

दूसरे चरण का अध्ययन गमले में किया गया। प्रत्येक गमले में दस बीजों को बोया गया। समान पर्यावरणीय परिस्थितियाँ प्रदान की गई। 26°C का औसत तापमान लिया गया। पहले सप्ताह के अन्त में अंकुरित बीजों का प्रतिशत नोट किया गया। दूसरे सप्ताह के अन्त में जड़ और तना की लम्बाई, ताजा और शुष्क भार नोट किया गया। पत्तियों की औसत संख्या भी नोट की गई। इसी प्रकार तीसरे सप्ताह के अन्त में भी सभी मान लिये गये। प्रयोग को सात उपचारों के साथ यादृच्छिक ब्लाक बनाकर किया गया। विश्लेषण विचरण (Variance) विधि का प्रयोग करके विश्लेषण की तुलना की गई। F- परीक्षण की सहायता से उपचारों का महत्व है या नहीं, पता लगाया।

**सारणी - 2 औद्योगिक बहिःस्त्राव के भौतिक-रासायनिक गुण**

| क्रमांक | प्राचाल | माप (पी॰पी॰एम॰) | | | क्रान्तिक अन्तर |
|---|---|---|---|---|---|
| | | न्यूनतम | अधिकतम | औसत | |
| 1 | रंग | भूरा काला | | | |
| 2 | सुगंध | ऐल्कोहल युक्त अम्लीय महक | | | |
| 3 | ताप | 15.5W | 31.0S | 24.7 | 6.6 |
| 4 | पीएच | 77S | 8.9W | 8.3 | 0.7 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | विद्युतचालकता (म्यूमोज/सेमी0) | 184.0R | 680.0S | 543.8 | 4.8 |
| 6. | घुलित आक्सीजन | 8.9W | 9.3S | 8.7 | 6.8 |
| 7 | B.O.D | 5.8R | 7.2W | 6.4 | 2.6 |
| 8. | C.O.D. | 7.4W | 8.2W | 7.9 | 4.6 |
| 9. | $CO_2$ | 1.8W | 9.1R | 3.9 | 6.7 |
| 10 | कार्बनिक कार्बन (%) | 43.2R | 84.4W | 66.6 | 5.9 |
| 11. | कुल नाइट्रोजन | 5.4W | 138.8S | 68.4 | 6.0 |
| 12. | नाइट्रेट नाइट्रोजन | 0.3R | 31.6S | 9.4 | 1.9 |
| 13. | कार्बोनेट | 0W | 11.0S | 4.4 | 2.0 |
| 14. | बाईकार्बोनेट | 75.0W | 406.4W | 283.6 | 4.6 |
| 15. | क्लोराइड | 25.6R | 142.0S | 70.4 | 7.2 |
| 16. | फास्फेट | 0.4R | 1.2S | 0.8 | 1.3 |
| 17. | पोटैसियम | 28.4R | 54.2S | 44.8 | 2.7 |
| 18. | आयरन | 2.6W | 13.4S | 4.1 | 1.8 |
| 19. | कॉपर | 0.9R | 1.5S | 1.1 | 1.3 |
| 20. | जिंक | 0.4R | 0.5S | 0.6 | 1.4 |
| 21. | मैंगनीज | 0.4R | 1.1S | 0.6 | 1.2 |

## परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त अध्ययन से यह स्पष्ट है कि औद्योगिक बहिःस्राव का रंग प्रदूषण के कारण भूरा लिये हुये काला है। बहिःस्राव की महक ऐल्कोहल जैसी तीक्ष्ण है और प्रदूषण बढ़ने से जल का पीएच बढ़ जाता है। यह पाया गया कि यदि प्रदूषण अधिक है तो पीएच अधिक होगा। घुलित आक्सीजन का औसत मान 8.7 पी.पी.एम. पाया गया।

औद्योगिक बहिःस्राव का ताप 15.5-31.0°C के बीच रहा। बहिःस्राव का अधिक ताप, गर्म भाग से और बायलर से आने के कारण होता है। जल के ताप और इसके भौतिक-रासायनिक गुणों, जैसे पी एच और चालकता में घनिष्ठ सम्बन्ध बताया गया है।[3]

जल की चालकता आयनों के सान्द्रण और पोषणीय स्तर पर निर्भर होती है। औद्योगिक बहिःस्राव की चालकता 184-680 म्यू मोज/सेमी0 है। बिलग्रामी तथा दत्ता ने[4] बताया कि जल

की चालकता मौसम के अनुसार परिवर्तित होती है।

जल में कार्बनिक कार्बन मुख्यतः मृत कार्बनिक पदार्थ के कारण होता है। इसका मान औद्योगिक बहिःस्राव में 43.2-84.4% के बीच परिर्वतित होता है। इसी प्रकार के परिणाम सिंह और भौमिक[5] द्वारा प्राप्त किये गये।

जलीय पारितंत्र में जन्तुओं का वितरण और उपस्थिति मुख्यतः घुलित आक्सीजन पर निर्भर करती है। इसका मान औद्योगिक बहिःस्राव में 8.9-9.3 पी.पी.एम. के बीच होता है। समान परिणाम ऋषि[6], त्रिपाठी और सिकन्दर[7] द्वारा प्राप्त किये गये।

जीवरासायनिक आक्सीजन मांग बताती है कि जीवाणुओं द्वारा पानी में घुली कितनी ऑक्सीजन कार्बनिक पदार्थों के नष्ट होने में प्रयुक्त होगी। यह कार्बनिक प्रदूषण का अच्छा सूचक है। इसलिये खपत के लिये जल की उपयुक्तता निश्चित करने के लिये इसकी सहायता ली जाती है। जैव उपयोगी कार्बनिक पदार्थ का पता लगाने के लिये एक मापक जीव रासायनिक आक्सीजन मांग का प्रयोग किया जाता है।[8]

जल में घुलित गैसों की मात्रा पर मौसम का अत्यधिक प्रभाव पड़ता है।[9,10] औद्योगिक बहिःस्राव में $CO_2$ का सान्द्रण 1.8-9 पी.पी.एम. के बीच परिवर्तित हुआ है। पहवा तथा मेहरोत्रा[11] ने मुक्त $CO_2$ और DO के बीच अन्तःसम्बन्ध पाया है।

जल में नाइट्रेट और पूर्ण नाइट्रोजन की मात्रा मौसम के साथ परिवर्तित होती है।[12] औद्योगिक बहिःस्राव में नाइट्रेट-नाइट्रोजन 0.3-31.6 पी.पी.एम के बीच परिवर्तित हुआ है। यह परिणाम दिखाता है कि कार्बनिक पदार्थ का विघटन और नाइट्रीकरण उपचार और बहाव के समय होता है। ऐसे ही परिणाम चटर्जी इत्यादि[13] के द्वारा पाये गये। औद्योगिक बहिःस्राव में कार्बोनेट की मात्रा 0.0-11.0 पी.पी.एम की बीच परिवर्तित हुई।

जल में क्लोराइड और प्लवक के सूक्ष्मजीवों में घनिष्ठ सम्बन्ध होता है। क्लोराइड स्वयंपोषी पौधों में फोटोफास्फोरिलन और जल की फोटोलिसिस की उपापचय क्रिया में सक्रिय भूमिका निभाता है। इसका अधिक सान्द्रण प्रदूषण का सूचक समझा जाता है, वह चाहे जन्तुओं से उत्पन्न कार्बनिक निरर्थक पदार्थ से हो या औद्योगिक वाहित से। प्रदूषित जल में क्लोराइड की अधिक मात्रा पायी जाती है।

पोटैसियम की मात्रा 28.4-54.2 पी.पी.एम के बीच परिवर्तित हुई है। समान परिणाम सिकन्दर[15] को भी मिले।

## सारणी - 3

## तोरई के बीज अंकुरण और उसकी वृद्धि पर पहले सप्ताह के अन्त में औद्योगिक बहिःस्राव का प्रभाव (पेट्रीडिश में)

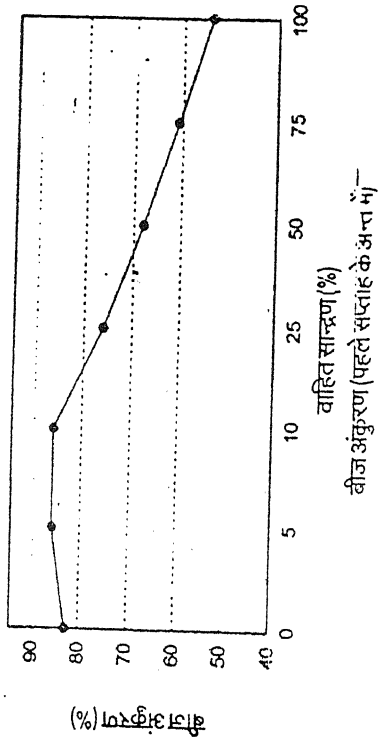
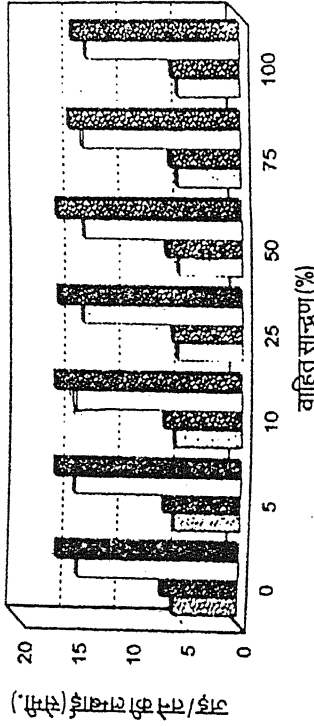
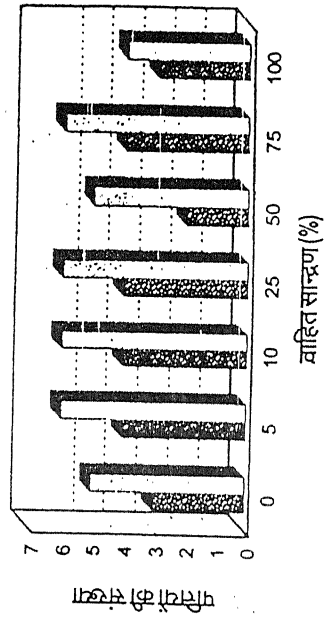
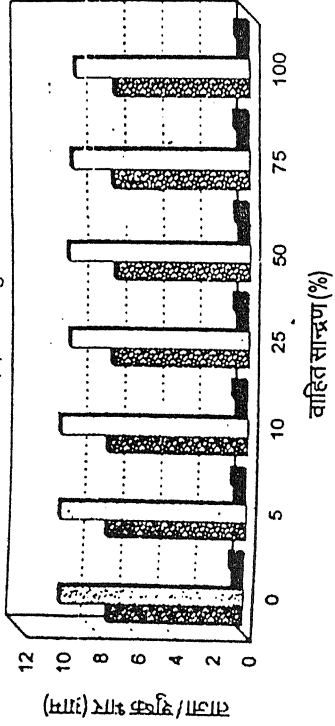
| क्रमांक | बहिःस्राव सान्द्रण | अंकुरण (%) | लम्बाई (सेमी) जड़ | तना | भार (ग्राम) ताजा | शुष्क |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | 82 | 3.01±0.5 | 4.91±0.4 | 1.13±0.5 | 0.09±0.06 |
| 2. | 5 | 87 | 3.98±0.5 | 4.97±0.4 | 1.22±0.4 | 0.09±0.06 |
| 3. | 10 | 87 | 3.98±0.6 | 5.38±0.3 | 1.28±0.2 | 0.11±0.06 |
| 4. | 25 | 75 | 2.85±0.7 | 5.26±0.2 | 1.23±0.3 | 0.10±0.07 |
| 5. | 50 | 62 | 2.54±0.8 | 4.42±0.5 | 1.10±0.4 | 0.09±0.08 |
| 6. | 75 | 61 | 2.46±0.9 | 4.21±0.4 | 1.08±0.7 | 0.09±0.06 |
| 7. | 100 | 52 | 1.98±0.6 | 3.88±0.5 | 1.04±0.1 | 0.08±0.05 |

± मानक त्रुटि दिखाता है।

सार्थकता 0.05 है।

पौधों की वृद्धि और बीज अंकुरण पर प्रदूषक के प्रभाव का अध्ययन कई वैज्ञानिकों ने किया है। सोडियम का बीज अंकुरण और वृद्धि पर विपरीत प्रभाव अग्रवाल इत्यादि ने देखा है।[16] चने के बीज के अंकुरण पर जल प्रदूषण का प्रभाव मुरूमकर तथा चावन[17] द्वारा दिखाया गया है।

बावर और विलकास्ट[18] ने सिंचाई अभियान में कैल्सियम कार्बोनेट की भूमिका को महत्वपूर्ण बताया। प्रस्तुत अध्ययन दर्शाता है कि सब्जी की फसल की बीज अंकुरण, औद्योगिक बहिःस्राव में उपस्थित क्लोराइड, पी एच और कार्बोनेट के मध्य प्रतिलोम सम्बन्ध है। दारा इत्यादि ने[19] कार्बोनेट,बाइकार्बोनेट, क्लोराइड और सोडियम के अधिक सान्द्रण द्वारा गेहूँ के बीज अंकुरण में कमी पाई।

सारणी 3 और 4 से पता चलता है कि औद्योगिक बहिःस्राव में अधिकतम अंकुरण और वृद्धि 10 प्रतिशत सान्द्रण पर होती है। 5 प्रतिशत का भी परिणाम कन्ट्रोल से अच्छा था। आद्योगिक बहिःस्राव में आयरन, मैंगनीज, मैग्नीशियम, कोबाल्ट, मरकरी आदि विषैले पदार्थ रहते हैं जो बीज अंकुरण को प्रभावित करते हैं। इस प्रकार उपर्युक्त अध्ययन के आधार पर यह कहा जा सकता है कि औद्योगिक बहिःस्राव सान्द्रण का उपयोग तोरई के बीज अंकुरण और वृद्धि के लिए उपयोगी नहीं हैं।

(अ) अंकुरण
बीज अंकुरण (%)
90
80
70
60
50
40
0
5
10
25
50
75
100
वाहित सान्द्रण (%)
बीज अंकुरण (पहले सप्ताह के अन्त में)
(ब) जड़/तना की लम्बाई
जड़/तने की लम्बाई (सेमी.)
20
15
10
5
0
0
5
10
25
50
75
100
वाहित सान्द्रण (%)
जड़ की लम्बाई (द्वितीय सप्ताह के अन्त में)
जड़ की लम्बाई (तृतीय सप्ताह के अन्त में)
तने की लम्बाई (द्वितीय सप्ताह के अन्त में)
तने की लम्बाई (तृतीय सप्ताह के अन्त में)
(स) पत्तियों की संख्या
पत्तियों की संख्या
7
6
5
4
3
2
1
0
0
5
10
25
50
75
100
वाहित सान्द्रण (%)
पत्तियों की संख्या (द्वितीय सप्ताह के अन्त में)
पत्तियों की संख्या (तृतीय सप्ताह के अन्त में)
(द) ताजा / शुष्क भार
ताजा / शुष्क भार (ग्राम)
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
25
50
75
100
वाहित सान्द्रण (%)
ताजा भार (द्वितीय सप्ताह के अन्त में)
ताजा भार (तृतीय सप्ताह के अन्त में)
शुष्क भार (द्वितीय सप्ताह के अन्त में)
शुष्क भार (तृतीय सप्ताह के अन्त में)

## सारणी - 4

### तोरई के बीज अंकुरण और उसकी वृद्धि पर द्वितीय और तृतीय सप्ताह के अन्त में औद्योगिक बहिःस्त्राव का प्रभाव (गमले में)

| क्र. स. | बहिःस्त्राव सान्द्रण | अंकुरण (%) | जड़ की लम्बाई (सेमी.) | | तने की लम्बाई (सेमी.) | | पत्तियों की संख्या | | ताजा भार (ग्राम) | | शुष्क भार . (ग्राम) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | द्वितीय सप्ताह | तृतीय सप्ताह | द्वितीय सप्ताह | तृतीय सप्ताह | द्वितीय सप्ताह | तृतीय सप्ताह | द्वितीय सप्ताह | तृतीय सप्ताह | द्वितीय सप्ताह | तृतीय सप्ताह |
| 1. | 0 Control | 86 | 5.83±0.3 | 6.91±0.3 | 14.55±0.4 | 16.55±0.1 | 3 | 5 | 7.26±0.2 | 9.85±0.1 | 0.58±0.02 | 0.79±0.01 |
| 2 | 5 | 87 | 5.94±0.4 | 6.92±0.2 | 14.99±0.2 | 16.88±0.2 | 4 | 6 | 7.47±0.3 | 10.01±0.2 | 0.60±0.01 | 0.80±0.02 |
| 3 | 10 | 88 | 6.15±0.5 | 7.09±0.1 | 15.19±0.1 | 17.11±0.3 | 4 | 6 | 7.88±0.4 | 10.50±0.3 | 0.60±0.02 | 0.81±0.03 |
| 4 | 25 | 76 | 5.75±0.6 | 6.23±0.4 | 14.33±0.4 | 16.65±0.4 | 4 | 6 | 7.28±0.3 | 9.57±0.4 | 0.58±0.03 | 0.79±0.04 |
| 5 | 50 | 68 | 5.66±0.3 | 6.83±0.5 | 14.26±0.5 | 16.73±0.5 | 2 | 5 | 7.16±0.4 | 9.67±0.2 | 0.57±0.04 | 0.75±0.05 |
| 6 | 75 | 61 | 5.67±0.3 | 6.34±0.3 | 14.27±0.6 | 15.52±0.6 | 4 | 6 | 7.27±0.2 | 9.46±0.3 | 0.58±0.03 | 0.79±0.06 |
| 7 | 100 | 54 | 5.20±0.2 | 6.00±0.3 | 13.39±0.6 | 15.01±0.7 | 3 | 4 | 7.09±0.3 | 8.00±0.3 | 0.55±0.04 | 0.70±0.06 |

± मानक त्रुटि दिखाता है ।

सार्थकता 0.05 है ।

## निर्देश

1. मिश्रा, एस.जी. तथा पवन कुमार : Curr. Agric. 1994, 18 (1-2) : 13-17
2. ब्रुक्स, आर.आर. : Accumulation of Nickel in terrestrial plants. Nickel in environment, ed., J.O.Nriagu, John Wiley and Sons. New York. 1980, 407-430
3. रामानीबाय, पी.एस. तथा रवि चन्द्रन, एस. : India Poll. Res. 6(2), 77-81.
4. बिलग्रामी, के.एस. तथा दत्ता, मुंशी,जे.एस. : Ecology of river Ganges (Patna to Faraka). Annual Report, MAB Project Unesco, 1995.
5. सिंह ए. के. तथा भौमिक, बी.एन. : Ind. J. Ecol., 1985, 12, (1), 17-19
6. ऋषि,वी. : पीएच डी थीसिस, Kashmir University, 1983.
7. त्रिपाठी, बी. डी. तथा सिकन्दर, एम. : Tropical Ecology, Bhopal, 1984
8. तिवारी, बी. के. तथा मिश्रा, आर. आर. : Hydrobiol., 1982, 94, 257-267
9. रेड्डी, के.आर. : Hydrobiol. 1981, 88, 201-207
10. सोमशेकर, आर.के., रामास्वामी, एस.एन. तथा गोविन्दप्पा, डी.ए. : Proc. Indian Natn. Sci. Acad., 1982, B48(5), 635-641
11. पहवा, डी.वी. तथा मल्होत्रा, एस.एन. : Proc. Indian Natn. Sci. Acad. 1989, 3, 157-189.
12. बिलग्रामी, के.एस., भौमिक, बी.एन. तथा सिंह, ए.के. : Proc. Indian Natn. Sci. Acad., 1986, B, 52(4), 509-514.
13. चटर्जी, ए. खान, इकबाल, ए., अली,एम. तथा मुमताज, अशफा : Indian J. Animal Res. 1981, 15(1), 63-67.
14. फ्रोस्टनर,बी. : "Cadmium" In the handbook of environmental chemistry, anthropogenic compounds, ed., O. Hutzinn, 3 part A, Springer verlag. Berlin, 59-107
15. सिकन्दर, एस. : पीएच डी थीसिस, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, 1987.
16. अग्रवाल, एस. सी., शर्मा, सी.पी. तथा मेहरोत्रा, एन. के. : J. Indian Soc. Soil Sci., 12, 243-254
17. मुरुमकर तथा चावन, पी.डी. : Proc. ISCA, India, 1983
18. बावर, सी.ए. तथा विलकाक्स,एल.वी. : Proc. Soil Sci. Soc. Amer., 1985, 20, 93-94.
19. दारा, बी. एल., जैन, एन. तथा सिंह, एच. : Indian J. Agric. Sci. 1970, 40, 438-444.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# मत्स्य पालन की स्वदेशी प्रजाति बहुल उपज प्रणाली : एक नई प्रविधि

अरविन्द मिश्र

मत्स्य पालक विकास अभिकरण, विकास भवन, तृतीय तल, इलाहाबाद (उ॰प्र॰)

तथा

बी॰ के॰ द्विवेदी

बायोवेद शोध एवं प्रसार केन्द्र, 103/42 मोती लाल नेहरू रोड, इलाहाबाद (उ॰प्र॰)

[ प्राप्त – अप्रैल 9, 2003]

## सारांश

भारत में प्रचलित पारंपरिक वार्षिक एकल मत्स्य उपज के सापेक्ष एक 'स्वदेशी मत्स्य प्रजाति (रोहू, कतला एवं नैन) बहुल उपज प्रणाली' विकसित की गयी है। इस नई प्रविधि के अन्तर्गत एक ही वर्ष में 4 मत्स्य उपजें प्राप्त की गयी हैं। 3-3 माह के समयान्तराल पर 300-500 ग्राम आकृति की मछलियों की औसत 2500 किग्रा की 4 उपजें प्राप्त हुईं। इस तरह मात्र 1 वर्ष में कुल 10,000 किग्रा0 प्रति हेक्टयर प्रतिवर्ष की मत्स्य उपजें प्राप्त की गईं है जो पारम्परिक प्रविधि की तुलना में 4 गुना अधिक हैं। प्रस्तुत शोध-पत्र में इस प्रविधि के विभिन्न पहलुओं पर चर्चा की गयी है।

## Abstract

**Multiple crop pattern in indigenous fish species farming : A new technique.** *By* Arvind Mishra and B.K. Dwivedi, Bioved Research & communication Centre, Allahabad.

A new technique of multiple crop pattern in farming of indigenous fish (Labeo Rohita, Catla catla and Cirrhinus mrigal) has been developed as against the traditional annual cropping pattern prevalent in the country. The new technique gives rise to 4 subsequent crops of fish in one year in comparison to

single annual crop of the traditional culture system. The technique yielded 4 successive crops each of an average of 2500 kg of 300-350 gms of fish of varying size. A total average production of 10,000 kg/year was achieved through this newly developed technique which is 4 times higher in comparison to prevalent traditional system. Various aspects of the technique are discussed.

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य मत्स्य पालन की नवीन स्वदेशी प्रजाति बहुल उपज प्रणाली का अध्ययन करना है क्योंकि पारम्परिक प्रविधि की तुलना में यह अधिक सक्षम है।

## प्रयोगात्मक

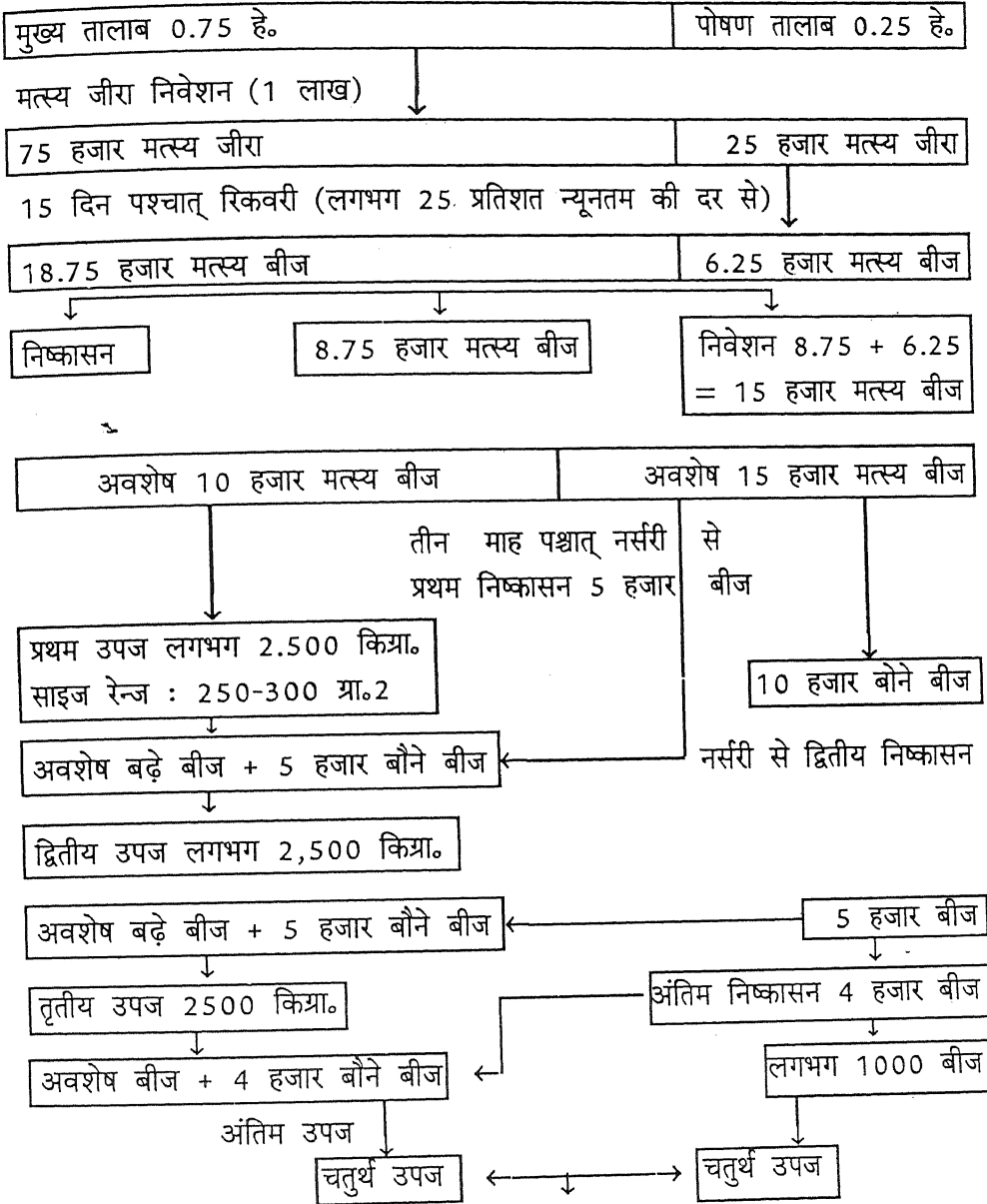
मत्स्य पालन हेतु ग्रामसभा के एक हेक्टेयर के 3 तालाबों को चयनित किया गया, जिनमें प्रत्येक में 0.25 हेक्टेयर क्षेत्र की पृथक मेड़बन्दी कर मुख्य तालाब (Main Pond) से अलग करते हुए उन्हें पोषण तालाब (Nursery Pond) का स्वरूप दिया गया। इनमें मत्स्य पालन की ज्ञात मानक विधियों (द्विवेदी [1,2]) से तालाब की तैयारी की गयी।

प्रत्येक तालाब के उपर्युक्त दोनों हिस्सों, मुख्य एवं पोषण तालाब में क्रमशः 75 हजार एवं 25 हजार कुल 1 लाख मत्स्य जीरे (Fish spawn) का निवेशन किया गया। संचित मत्स्य जीरे का औसत परिमापन 500/ml. अभिलेखित हुआ। जीरे का पोषण सरसों की खली एवं चावल के बारीक कने (1:1अनुपात) के पाउडर के रूप में 3% सकल जीरा भार के दर से निरन्तर 15 दिनों तक करने के पश्चात् मुख्य तालाब से बारम्बार महीन जाल के अनुप्रयोग से लगभग 90%, 20-25 मि0मी0 सीमान्तर्गत मत्स्य बीज को पोषण तालाब में स्थानान्तरित कर दिया गया। शेष अनुमानित 10 प्रतिशत.मत्स्य बीज को मुख्य तालाब में ही रखा गया।

तदन्तर मुख्य तालाब के लगभग 10 हजार मत्स्य बीज को 3 प्रतिशत की दर से सरसों एवं चावल के कने (1:1 अनुपात) को डिमाण्ड फीडिंग विधि (मिश्रा[3]) से प्रति दिन दिया गया, किन्तु पोषण तालाब में मत्स्य बीज की वृद्धि दर को प्रतिबन्धित रखने हेतु मात्र 0.02 प्रतिशत सकल बीज भार की दर से खली एवं कने के उपर्युक्त संघटन को बतौर छिड़काव किया गया।

मुख्य तालाब में प्राकृतिक भोजन के लिए प्रतिमाह 1000 कि0ग्रा0 गोबर, 75किलो रासायनिक खाद (अमोनियम सल्फेट 40 किग्रा0, सिंगल सुपर फास्फेट 30 किग्रा0 एवं पोटाश 5 किलो) एवं रोग निरोधन के लिए भिगोकर 100 किलो चूने (CaO) का प्रयोग किया गया, जबकि पोषण तालाब में 50 किग्रा0, गोबर 3.5 किग्रा0, उर्पयुक्त अनुपात में रासायनिक खाद का मिश्रण एवं मात्र 10 किलो चूने का प्रयोग किया गया। इस तरह पोषण तालाब में जीरे की वृद्धि दर को बाधित रखते हुए उसे आगामी फसलों के बौने बीज (Dwarf fish seed) के रूप में रखा गया।

**फ्लो चार्ट - 1**

**मत्स्य पालन तालाब -1 हेक्टेयर**

**उत्पादन 2500 किग्रा॰**

**कुल वार्षिक उत्पादन 10,000 किग्रा॰ औसत**

प्रति तीन माह में मुख्य तालाब से उपज प्राप्त की गयी एवं पोषण तालाब से 10 हजार मत्स्य बीज को मुख्य तालाब में पुनर्निवेशित किया गया। इसी क्रम में वर्ष भर 4 उपजें प्राप्त की गयीं। सभी तीन तालाबों से प्राप्त उपज तथा अन्य पहलुओं का ब्योरा सारणी 1 में दिया गया है।

**सारणी 1 : बहुल मत्स्य उपज प्रविधि के परिणाम**

**प्रजाति :** रोहू,कतला और नैन, प्राप्त उपज (किग्रा०), कुल क्षेत्रफल 1 हे०

| तालाब संख्या | प्रथम त्रैमास (जुलाई-सित०) | द्वितीय त्रैमास (अक्टू०-दिस०) | तृतीय त्रैमास (जन०-मार्च) | चतुर्थ त्रैमास (अप्रैल-15जून) | वार्षिक उत्पादन |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2680 | 2110 | 2450 | 2900 | 10,140 |
| 2. | 2730 | 2010 | 2540 | 2800 | 10,080 |
| 3. | 2620 | 1995 | 2510 | 2950 | 10,075 |
| | | | | वार्षिक औसत : | 10,098 |

## परिणाम तथा विवेचना

इस विधि से प्रतिवर्ष एक हेक्टर जलक्षेत्र से औसत 10 हजार किग्रा0 की उपज सुनिश्चित की गयी। वर्ष भर मत्स्य बीज की उपलब्धि भी सुनिश्चित की गयी। पोषण तालाब में न्यून पोषण से वृद्धि बाधित बीज को मुख्य तालाब में डालने पर उनकी वृद्धि बहुत अच्छी पायी गयी। पोषण तालाब से मत्स्य बीज के अन्तिम निष्कासन एवं मुख्य तालाब में निवेशन के उपरान्त पोषण तालाब एवं मुख्य तालाब में अवशेष बीज को भी बढ़ी दर (3% शरीर भार) पर पोषण से उनकी वृद्धि तीव्र पायी गयी। मुख्य तालाब एवं पोषण तालाब में मत्स्य जीरा निवेशन एवं निष्कासन/निवेशन के क्रमवार तरीके को फ्लो चार्ट -1 में दिखाया गया है।

मत्स्य बाजारों में छोटे साइज, कम वजन की भारतीय शफर मछलियों की अच्छी खपत देखी जा रही है, क्योंकि इनका मूल्य अपेक्षाकृत कम होने से उपभोक्ताओं के एक बड़े आर्थिक रूप से कमजोर वर्ग के मध्य इनकी अच्छी खपत होती है, जबकि बड़ी मछलियों (टेबल फिश) की माँग अपेक्षाकृत समृद्ध उपभोक्ताओं द्वारा की जाती है या बड़ी मछलियों की बिक्री उपभोक्ताओं को काटकर टुकड़ों में की जाती है। लेकिन साबूत मछली, भले ही वह छोटे आकार की हो, उसे क्रय करने की प्रवृत्ति उपभोक्ताओं में बढ़ रही है। इस तरह प्रस्तुत प्रविधि मत्स्य बाजार के समकालीन झुकाव के भी अनुरूप है। साथ ही मत्स्य विक्रेताओं को प्रत्येक 3 माह पर मत्स्य बिक्री से मिलने वाली आय की निरंतरता एवं आर्थिक सुरक्षा उन्हें इस प्रविधि के प्रति उत्साहित करेगी।

**निष्कर्ष:** प्रस्तुत प्रविधि मत्स्य विक्रेता एवं क्रेता दोनों का हित साधन करने में क्षम है, जिसे व्यापक स्तर पर अंगीकार किये जाने की संस्तुति की जाती है।

## निर्देश

1. द्विवेदी, बृजेशकान्त : आधुनिक जल कृषि, बायोवेद रिसर्च सोसाइटी, 2001

2. द्विवेदी, बृजेशकान्त : आधुनिक जल कृषि, कृषक जिज्ञासा एवं वैज्ञानिक समाधान 2002, बायोवेद रिसर्च सोसाइटी द्वारा प्रकाशित

3. मिश्र,अरविन्द तथा द्विवेदी, बृजेशकान्त, मत्स्य व्यवसाय का प्रसार : वर्तमान परिदृश्य,एब्सट्रेक्ट, भारतीय कृषि वैज्ञानिकों एवं कृषकों का अधिवेशन 2001, आयोजक बायोवेद रिसर्च सोसाइटी, इलाहाबाद

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# होल्डर मिट्रिक में त्रुटि निरूपण


## टीकम सिंह तथा भावना सोनी

**गणित विभाग, उज्जैन इंजिनियरिंग महाविद्यालय, उज्जैन (म0प्र0)**


[ प्राप्त — जून 7, 2003]


### सारांश

सन्निकटन पर दो प्रमेय स्थापित किए गए हैं। इनसे मोहपात्रा तथा चन्द्र के परिणामों को प्राप्त किया गया है। कई अन्य परिणाम भी प्राप्त किए गए हैं।

### Abstract

**Error estimate in Holder metric.** *By* Tikam Singh and Bhavana Soni, Mathematics Department, Ujjain Engineering Collage, Ujjain (M.P.).

Two theorems on the degree of aproximation are proved by using Eulers means and the results of Mohapatra and Chandra are deduced from them. Several results are also deduced.


1. माना कि फलन $f \varepsilon L[0,2\pi]$ की फूरिए श्रेणी

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

द्वारा प्रदर्शित की गयी है।

समष्टि

$$H_w = \{ f \ \varepsilon \ C_{2\pi} : |f(x) - f(y)| \leq K\omega(|x-y|) \ \}, \tag{2}$$

एवं नार्म $\|.\|_{\omega^*}$

$$\|f\|_{\omega^*} = \|f\|_c + \sup_{x,y}\{\Delta^{\omega^*}f(x,y)\}, \tag{3}$$

द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

$$\|f\|_c = \sup_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|,$$

तथा

$$\Delta^{\omega^*}f(x,y) = \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega^*(|x-y|)} \quad ,(x\neq y),$$

तथा $\Delta^0 f(x,y)=0, \omega(t)$ और $\omega^*(t), t$ के वर्धमान फलन हैं। यदि $\omega(|x-y|)\le A|x-y|^\alpha$ तथा $\omega^*(|x-y|)\le K|x-y|^\beta, 0\le\beta<\alpha\le 1, A$ तथा $K$ धनात्मक चर हैं, तब समष्टि

$$H_\alpha = \{f\in C_{2\pi} : |f(x)-f(y)|\le K|x-y|^\alpha, 0<\alpha\le 1\},$$

माना कि श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, के आंशिक योगों का अनुक्रम $\{s_n\}$ $S_n=c_0+c_1+\text{------}+c_n$. अनुक्रम $\{s_n\}$ के (E,q) माध्यों को हार्डी[2] ने परिभाषित किया है।

हम निम्नांकित चिन्हों का उपयोग करेंगे -

$${}^nC_k = C(n,k), \tag{4}$$

$$T_n = (1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)q^{n-k}S_k \tag{5}$$

$$\phi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x) \tag{6}$$

$$E(n,t) = (1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{n} C(n,k)q^{n-k}\sin(k+1/2)t \tag{7}$$

$$E(n,t) = O[\exp\{(-2nqt^2)/(1+q)^2\pi^2\}], (0<t<\pi) \tag{8}$$

$$E(n,t) = O(t^{-1}n^{-1/2}) \tag{9}$$

मोहपात्रा तथा चंद्र[3] ने आयलर माध्यों के योगों के फलन के त्रुटि निरूपण पर एक प्रमेय स्थापित किया है।

**प्रमेय** : माना कि $0 \le \beta < \alpha \le 1$, तब, $f \ \varepsilon \ H_\alpha$ के लिए

$$\|E_n^q(f) - f\|_\beta = O\{n^{-1/2(\alpha-\beta)}(\log(n)^{\beta/\alpha}\}, \qquad (10)$$

जहाँ $E_n^q(f;x)$ निम्नांकित श्रेणी का आयलर माध्य है -

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx} \qquad (11)$$

**2.** प्रस्तुत शोध पत्र के लेखकद्वय ने मोहपात्रा तथा चन्द्र के प्रमेय का व्यापकीकरण करके दो प्रमेयों की सृष्टि की है। इन प्रमेयों की सहायता से कई अन्य प्रतिफल भी प्राप्त किए हैं।

**प्रमेय 1** : माना कि (2) में वर्णित $\omega(t)$ एक ऐसा फलन है कि $\omega(t)/t$ वर्धमान है तथा $\omega(t)/t^2$ ह्रासमान है, तब $0 < r \le 1/2, 0 \le \beta < \eta \le 1$ के लिए

$$\|T_n(f;x) - f(x) \quad \|_{\omega^*} = O\left[(\omega(\pi/n^r))^{1-\beta/n} \{(\log(n)^{\beta/\eta} + n^{3/2(2\pi-1)}\}\right] \qquad (12)$$

**प्रमेय 2** : माना कि (2) में वर्णित $\omega(t)$, एवं $H(t) > 0$ ऐसे फलन हैं कि

$$\int_t^\pi u^{-2}\omega(u) \ du = O(H)(t)) \qquad (13)$$

तथा

$$\int_0^t H(u) \ du = O(tH)(t)), t \to 0^+ \qquad (14)$$

तब $0 < \underline{r} \le 1/2$ एवं $f \ \omega \ H_\omega$ के लिए $0 \le \beta < \eta \le 1$

$$\|T_n(f;x) - f(x)\|_{\omega^*} = O[H(\pi/n^r))^{1-\beta/n} \ (\log(n))^{\beta/\eta} + (n^{r-1/2})^{\beta/\eta}\}] \qquad (15)$$

**3. प्रमेय 1 की उपपत्ति :**

यह आसानी से देखा जा सकता है कि

$$|\phi_x(t) - \phi_y(t) \quad | \le 4K\omega(|t|) \qquad (16)$$

तथा

$$|\phi_x(t)-\phi_y(t)\ \ |\le 4\quad A\omega(|x-y|) \tag{17}$$

हम जानते हैं कि जिगमुण्ड[6]

$$T_n(f;x)=(1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\quad q^{n-k}S_k(f;x)$$

तब चन्द्र[1] एवं सिंह[2] से, हम लिखते हैं

$$E_n(x)=T_n(f;x)-f(x)=\frac{\{(1+q)^{-n}\}}{\pi}\int_0^{\pi}\{\frac{\phi_x(t)}{\sin(t/2)}\ \}]\sum_{k=0}^{n} C(n,k)q^{n-k}\sin(k+1/2)t]dt$$

$$|E_n(x,y)|=|E_n(x)-E_n(y)\le\left(\frac{1}{\pi(1+q)^n}\right)\left|\frac{\phi_x(t)-\phi_y(t)}{\sin(t/2)}\right|[\left|\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\quad q^{n-k}\sin(k+1/2)t\right|]\ \ dt$$

निम्नांकित प्रकार से व्यवस्थित करने पर

$$\int_0^{\pi}=(\int_0^{\pi/n^r}+\int_{\pi/n^r}^{\pi})$$

$$=(I_1+I_2) \tag{18}$$

चूंकि $(1/(1+q)^n)\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\ \ q^{n-k}\sin(k+1/2)t\le 1$ तथा (16) का उपयोग करने पर

$$I_1=O\left\{\int_0^{\pi/n^r}\left|\frac{\phi_x(t)-\phi_g(t)}{t}\right|\ \ dt\right\}$$

$$=O\{\int_0^{\pi/n^r}\frac{\omega(|t|)}{t}\ \ dt\}$$

$$=O\{\omega(\pi/n^{\tau})\} \tag{19}$$

(8) तथा (16) का प्रयोग करने पर

$$I_2 = O\{ \int_{\pi/n^{\tau}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t} \exp(-Ant^2)\, dt\}$$

क्योंकि $d/dt\{\exp(-Ant^2)\} = -2Ant \exp(-Ant^2), [A = 2q/\{\pi^2(1+q)^2\}]$

तब

$$I_2 = O\{n^{-1} \int_{\pi/n^{\tau}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t} d/dt(-\exp(-Ant^2))dt\}$$

$$= O(n^{2r-1}\omega(\pi/n^{\tau})\ ). \tag{20}$$

पुनः (17) का प्रयोग करने पर

$$I_1 = O[\omega(|x-y|) \int_0^{\pi/n^r} t^{-1}(1+q)^{-n}|\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\ q^{n-k} \sin(k+1/2)t|dt]$$

क्योंकि $E(n,t) = O(nt), (0 \le t \le \pi/n)$ तथा $E(n,t) = O(1), (\pi/n < t \le \pi/n^{1/2})$

तब

$$I_1 = O\{\omega(|x-y|)( \int_0^{\pi/n} t^{-1} nt\ dt + \int_{\pi/n}^{\pi/n^r} t^{-1}\ dt\}$$

$$= O\{\omega(|x-y|)\ \ \log(n)\ \} \tag{21}$$

(7) से

$$I_2 = O\{\omega(|x-y|)( \int_{\pi/n^r}^{\pi} t^{-2} n^{-1/2}\ dt$$

$$= O\{\omega(|x-y|) \tag{22}$$

अब

$$I_k = I_k^{1-\beta/\eta} I_k^{\beta/\eta} \qquad k = 1, 2$$

के लिए

$$I_1 = [O(\omega(\pi/n^r))]^{1-\beta/\eta}[O(\omega(|x-y|)\log n)]^{\beta/\eta} \tag{23}$$

$$I_2 = [O(\omega(\pi/n^r)n^{2r-1})]^{1-\beta/\eta}[O(\omega(|x-y|)n^{r-1/2})] \tag{24}$$

अतः

$$\sup_{x,y}|\Delta^{\omega^*}E^n(x,y)| = \sup_{x,y}\frac{|E_n(x)-E_n(y)|}{\omega^*(|x-y|)}$$

$$= O\left[\left\{\frac{(\omega(|x-y|)\ )^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}\right\}[(\omega(\pi/n^r))^{1-\beta/\eta}\{(\log(n))^{\beta/\eta}+(n^{2r-1})^{1-\beta/\eta}(n^{r-1/2})^{\beta/\eta}\}]\right] \tag{25}$$

यह स्पष्ट है कि

$$\|E_n(x)\|_C = \max_{0\le x\le 2\pi}|T_n(f;x)-f(x)|$$
$$= O(\omega(\pi/n^r)) + O(\omega(\pi/n^r)n^{2r-1}) \tag{26}$$

उपर्युक्त प्रतिफलों को मिलाने पर

$$\|T_n(f;x)-f(x)\|_{\omega^*} = O[(\omega(\pi/n^r)^{1-\beta/\eta}((\log(n)^{\beta/\eta}+n^{3/2(2r-1)})] \tag{27}$$

अतः प्रमेय सिद्ध होता है।

**4. प्रमेय 2 की उपपत्ति**

प्रमेय 1 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए

$$|E_n(x,y)| = |E_n(x)-E_n(y)| \le [\pi^{-1}(1+q)^{-n}]\int_0^{\pi}\frac{|\phi_x(t)-\phi_y(t)|}{\sin(t/2)}\ \left|\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\right.$$
$$q^{n-k}\sin(k+1/2)t|dt$$

$$= (\int_0^{\pi/n^r} + \int_{\pi/n^r}^{\pi})$$
$$= (J_1 + J_2) \tag{28}$$

$$J_1 = O\{\int_0^{\pi/n^r}\left(\frac{\omega(t)}{t}\right)dt\ \ \}$$

(13) व (14) का उपयोग से, यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि

$$\int_0^t u^{-1}\omega(u)\ \ du = O(tH(t))$$

तब

$$J_1 = O(\pi / n^r \ H(\pi / n^r)) \tag{29}$$

पुनः (13) के साथ

$$J_2 = \max_{0 \le t \le \pi} \int_{\pi/n^2}^{\pi} \{\exp(-Ant^2)\} \frac{\omega(t)}{t^2} \, dt$$

$$= O(H(\pi / n^2)) \tag{30}$$

(17) का प्रयोग करने पर

$$J_1 = O(\omega(|x-y|) \ \log n) \tag{31}$$

$$J_2 = O(\omega(|x-y|)) \tag{32}$$

तब

$$J_k = J_k^{1-\beta/\eta} J_k^{\beta/\eta}$$

$$J_1 = [O\{\pi / n^2 \ H(\pi / n^2)\}]^{1-\beta/\eta} \ [O\{\omega(|x-y|) \log(n)\}]^{\beta/\eta} \tag{33}$$

$$J_2 = [O\{ H(\pi / n^2)\}]^{1-\beta/\eta} \ [O\{\omega(|x-y|) n^{r-1/2}\}]^{\beta/\eta} \tag{34}$$

इसलिए

$$\sup_{x,y} |\Delta^{\omega^*} E^n(x,y)| = O[(H(\pi / n^r))^{1-\beta/\eta} \{(\pi / n^r)^{1-\beta/\eta} (\log \ (n))^{\beta/\eta} + (n^{r-1/2})^{\beta/\eta}\}] \tag{35}$$

यह भी स्पष्ट होता है कि

$$\|E_n(x)\|_C = \max |T_n(f;x) - f(x)| = O(\pi / n^r H(\pi / n^r)) \tag{36}$$

(35) तथा (36) को जोड़ने पर

$$\|T_n(f;x) - f(x)\|_{\omega^*} = O[H(\pi / n^r))^{1-\beta/n} \{(\pi / n^r)^{1-\beta/\eta} \ (\log(n))^{\beta/\eta} + (n^{r-1/2})^{\beta/\eta}\}] \tag{37}$$

इस तरह प्रमेय 2 की उपपत्ति पूर्ण हुई।

**5. टिप्पणियाँ**

यदि प्रमेय 1 में $r = 1/2$ तथा $\eta = \alpha$ प्रतिस्थापित करते हैं तब निम्नांकित प्रतिफल प्राप्त होते हैं -

**उपप्रमेय** - माना कि $\omega = (t)$ जो कि (2) में दिया है, इस प्रकार है कि $\omega(t)/t$ वर्धमान है। तब

$$\|T_n(f;x) - f(x)\|_{\omega*} = O[(\omega(\pi / n^{1/2})^{1-\beta/\alpha}((\log(n)^{\beta/\alpha})$$

यदि हम $\omega(t) = O(t^{\alpha})$ उपर्युक्त प्रमेय में रखते हैं, जहाँ $0 < \alpha < 1, 0 < \alpha < B \leq 1$ तब मोहपात्रा तथा चन्द्र[3] के प्रमेय की प्राप्ति होती है।

पुनः $\beta = 0, \omega(t) = O(t^{\alpha})$ रखने पर, चन्द्र[3] का दूसरा प्रतिफल प्राप्त करते हैं।

यदि हम $H(t) = O(t^{\alpha-1}), 0 < \alpha < 1$ तथा $H(t) = \log(\pi / t), \alpha = 1$ रखते हैं, तब प्रमेय 2 को चन्द्र[3] के उपर्युक्त प्रमेयों में बदला जा सकता है।

## निर्देश

1. चन्द्र, प्रेम : Communications, 19+81, 30, 7-16
2. हार्डी, जी. एच. : Divergent Series, Oxford University Press, London, (1949)
3. मोहपात्रा, आर. एन. तथा चन्द्र, प्रेम : Math. Chronicle, 1982, 11. भाग 2,81-96
4. सिंह, टी. : The Mathematics Student, 1979, 47(3), 226-228.
5. सिंह, टी. : Math. Vesnik, 1991, 43, 111-118
6. जिगमुन्ड, ए. : Trigonometric Series, Vol.I. Cambridge University Press, (1959).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# यूनिट डिस्क में बहु उपहार्मोनिक फलन के एक वर्ग की वृद्धि

देवेन्द्र दत्त त्रिपाठी

गणित तथा यान्त्रिकी विभाग, इंस्टीट्यूट आफ इंजीनियरिंग तथा रूरल टेक्नालाजी, इलाहाबाद (उ. प्र.)

[ प्राप्त — मार्च 26, 2003]

**सारांश**

यह शोधकार्य पूर्ववर्ती कार्य का सातत्य है। इसमें लेखक ने पाया है कि टाइप का एक चर के प्रति आकलन अन्य चरों को स्थिर रखते हुए किया। तीव्र वृद्धि वाले फलनों की वृद्धि का भी अध्ययन किया गया।

**Abstract**

**On the growth of a class of plurisubharmonic function in a unit disc.** *By* Devendra Dutta Tripathi, Department of Mathematics & Rural Technology, Allahabad (U.P.).

This is continuation of earlier work which studies growth of analytic function in a unit disc. In this work the author has found an estimate of the type with respect to one of the variables keeping the others fixed, as well as studied the growth parameters for functions having fast growth.

## प्रस्तावना

जुनेजा तथा कपूर[1] ने यूनिट डिस्क में वैश्लषिक फलनों की वृद्धि प्राचलों का अध्ययन शुरू किया और त्रिपाठी[2] ने इस पर आगे अध्ययन किया। प्रस्तुत शोधकार्य त्रिपाठी द्वारा प्राप्त किये गये परिणामों के सातत्य में है ।

कई संमिश्र चरों वाले एक गैर अचर वैश्लेषिक फलन को

$$f(Z) = \sum_{\|K\| \cdot 0}^{\infty} C_{k_1} \cdot ; C_{k_2 \dots k_n} ; Z_1^{k_1} \dots . Z_n^{k} n \quad (1)$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यहाँ हम वेक्टर (~) के संमिश्र n-टपल वेक्टर को (~) द्वारा और

असली n-टपल को (-) द्वारा प्रदर्शित करेंगे। अर्थात् $\overline{Z}\varepsilon\mathbb{C}^n$ यदि $\overline{Z}=(z_1,z_2,\ldots\ldots z_n)$ तथा $\overline{t}\varepsilon R^n$ यदि $\overline{t}=(t_1,t_2\ldots\ldots t_n)$ । हम $\|\overline{A}\|=(A_1+A_2+\ldots+A_n)$ के द्वारा भी प्रदर्शित करेंगे। मानाकि $D=\{(z_1,z_2,\ldots z_n)\ :\left|z_i-z_i^0\right|<R_1\ \ i=1,2,\ldots,n\}$ $\mathbb{C}^n$ में पालीडिस्क हो जिसका केन्द्र $\widetilde{Z}^{(0)}=(z_1^0,z_2^0,\ldots\ldots,z_n^0)$ पर हो तथा पाली अर्धव्यास $\overline{R}=R_1,R_2,\ldots\ldots R_n)$ के तुल्य हो जहाँ प्रत्येक R एक स्थिर वास्तविक संख्या है $i=1,2,\ldots,n$ के लिए। राकिन[3] तथा सिन्हा[4] ने प्लुरी उपहार्मोनिक फलन के वृद्धि प्राचलों का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में वृद्धि प्राचलों के टाइप के साथ ही (q,1) तथा उच्च वृद्धि वाले फलनों के लिए कोटि का अध्ययन किया गया है। हमने असली मान वाले फलनों के दो वर्गों $\alpha$ तथा $\beta$ का प्रयोग किया है जिसका सूत्रपात $\alpha$ तथा $\beta$ की परिभाषाओं के लिए सरेमेटा[5] ने किया।

वर्ग $E(\beta),\beta\varepsilon L^0$ की परिभाषा सिन्हा[4] ने दी है किन्तु पूर्णता की दृष्टि से हमने वर्ग $E(\beta),\beta\varepsilon L^0$ की परिभाषा दी है। अब हम वृद्धि प्राचल कोटि तथा तीव्र वृद्धि दर वाले फलनों को परिभाषित करते हैं।

माना कि f वैश्लेषिक है यूनिट डिस्क में,

$M_G(t,f)=\max\limits_{r\varepsilon t_G} M(r,f), 0<t<1,$ जहाँ

$G=|G|=|G|=\{r_1,r_2,\ldots r_n)\varepsilon R^n: o\le r_1<1, i=1,\ldots n\}$

**परिभाषाएं**

**परिभाषा ( 1 )**

मानाकि $E(\beta)$ फलन $\phi(\overline{R})$ की एक श्रेणी है जो निम्नांकित की तुष्टि करती है-

(i) $\phi(\overline{R})$ $E(\beta)$ में D पर ऊपरी अर्ध संतत है ।

(ii) $\phi(\overline{R})$ $\overline{R}=R_1,R_2,\ldots\ldots R_n)$ चरों में से प्रत्येक में मोनोटोन तथा अ-ह्रासमान है।

(iii) $\phi(\overline{R})$ बहुउत्तल है $\beta(\log(1-R_1)-\beta(\log(1-R_2),\ldots\ldots,-\beta(\log(1-R_n)$ में जिसका अर्थ है कि प्रत्येक $\overline{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ एवं $\overline{S}=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ $I_+^n$ में तथा समस्त $\lambda,\mu$ के लिए, इस तरह कि $\lambda+\mu=1$

$$\left.\begin{aligned}&\phi[1-\exp\{\beta^{-1}(\lambda\beta(\log(1-t_n)))+\mu\beta(\log(1-s_1)\},\ldots,\\&\ 1-\exp\{\beta^{-1}(\lambda\beta(\log(1-t_n)))+\mu\beta(\log(1-s_n))\}]\\&\le\lambda\phi(t_1,\ldots,t_n)+\mu\phi(s_1,\ldots s_n).\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

यहाँ $I^n = \{R_1, R_2, \ldots, R_n) \varepsilon R^n : 0 \le r_i \le 1, i = 1,2\}$ तथा धनात्मक अंश है $I^n$ का। यह देखने योग्य है कि (2) में $\beta(x) = x$ रखने पर तत्समक फलन श्रेणी $E(\beta)\ \phi(\bar{R})$ फलन की श्रेणी में समानीत होता है जिसे जुनेजा तथा कपूर ने[1] परिभाषित किया है।

**परिभाषा ( 2 )**

$\alpha\ \varepsilon\ \Lambda$ एवं $\beta\ \varepsilon\ L^0$ के लिए सार्वीकृत टाइप को एक चर के प्रति निम्नवत् परिभाषित किया जाता है। इसमें अन्यों को स्थिर रखा जाता है।

$$\sigma = \lim_{R \to 1} \frac{\log M_{fD}(R)}{\alpha^{-1}[\rho_n \beta \log(1 - Rn)]}, \text{ जहाँ } M_{fD}{}^{(R)} = \operatorname*{Sup}_{\bar{z} \varepsilon D(R)} |f(\bar{z})|. \tag{3}$$

**परिभाषा ( 3 )**

फलन f के लिए जो G में वैश्लेषिक है, हम परिभाषा देते हैं -

$$\rho_G{}^{(q)} = \limsup_{t \to 1} \frac{\log^{[q]} M_G(t, f)}{-\log(1 - t)} \tag{4}$$

जहाँ $M_G(t, f) = \max M(\bar{r}, f),) < t < 1$

$G = G = \{r_1, \ldots, r_n) \varepsilon R^n : 0 \le r_1 < 1, i = 1, \ldots, n\}$

**परिभाषा ( 4 )**

फलन $0 < \rho_G(q) < \infty$ के लिए

$$T_G(q) = \limsup_{t \to 1} \frac{\log^{[q-1]} M_G(t, f)}{(1 - t)^{-\rho_G(q)}} \tag{5}$$

जहाँ q = 2,3,...ऐसा है कि $\rho_G^{(q)} = \infty$ तथा $\rho_G^{(q)} < \infty$

**परिभाषा ( 5 )**

माना कि $M_D(t, \phi) = \max_{r \varepsilon t_D} \phi(\bar{R}), 0 < t < 1,$

फ़लन $\phi(\bar{R})$ का उच्चिष्ठ मोडुलस हो और D यूनिट पालीडिस्क हो। $\phi(\bar{R})$ की सार्वीकृत कोटि निम्नवत् परिभाषित की जाती है -

$$\rho(\phi) = \limsup_{t \to 1} \frac{\alpha(M_D(t, \phi))}{-\beta(\log(1 - t))} \text{ जहाँ } \alpha \varepsilon \Delta \text{ तथा } \beta \varepsilon L^0 \tag{6}$$

**परिभाषा ( 6 )**

मानाकि $\alpha\ \varepsilon\ \Delta$ तथा $\beta \varepsilon L^0$ तो $E(\beta)$ में चर $R_i$ (अन्य चर को स्थिर $i \ne j$ रखते

हुए) $\phi^{+}(\bar{R})$ की सार्वीकृत कोटि निम्नवत् परिभाषित की जाती है -

$$\rho_n^*(\phi) = \limsup_{R_n \to 1} \frac{\alpha(\phi^{+}(\bar{R})}{-\beta(\log(1-R_n))}$$

## मुख्य परिणाम

**प्रमेय 1**

माना कि $\alpha \; \varepsilon \; \Delta$ जो $\alpha(x) = \lambda(\log(I-x))^k$ को तुष्ट करता है जहाँ $k > 0$ तो किसी $\lambda > 0$ एवं $\beta \varepsilon L^0$ को (3) द्वारा परिभाषित किया जाता है। $0 < \rho_G(q) < \infty$

**प्रमेय 2**

फलन f के लिए जो G में वैश्लैषिक है -

$$\rho_G(q)) = \limsup_{t \to 1} \frac{\log^{[q]} M_G(t,f)}{-\log(1-t)} \tag{8}$$

$$\text{तो } \limsup_{\|k\| \to \infty} \frac{\log^{[q-1]}(b_{\bar{k}})}{\log\|k\|} \frac{\rho_G}{\rho_G + 1} \tag{9}$$

**प्रमेय 3**

f फलन के लिए जो G में वैश्लेषिक है और $0 < \rho_G(q) < \infty$ तथा

$$T_G(q) = \limsup_{t \to 1} \frac{\log^{[q-1]} M_G(t,f)}{(1-t)^{-\rho_G^{(q)}}} \tag{10}$$

की तुष्टि करता है जहाँ q = 2,3,......, ऐसा है कि $0 < \rho_G(q-1) = \infty$ तथा $0 < \rho_G(q) < \infty$ तो

$$\frac{\rho_G + 1}{\rho_G}(T_G)^{\frac{1}{\rho_G}} = \limsup_{\|k\| \to \infty} \frac{\log^{[q-1]}|b_{\bar{k}}|}{\|\bar{k}\|} \tag{11}$$

## उपपत्तियाँ

**प्रमेय 1 की उपपत्ति :**

हम चुनेंगे -

$$t_i = 1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_i}{\lambda l_i + \mu m_i}\beta \log(1-R)\right)\right\}$$

$$s_i = 1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_i}{\lambda l_i + \mu m_i}\beta \log(1-R)\right)\right\}$$

$$t_n = 1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_n}{\lambda l_n + \mu m_n}\beta \log(1-R_n)\right)\right\} \quad (12)$$

$$s_n = 1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_n}{\lambda l_n + \mu m_n}\beta \log(1-R_n)\right)\right\}$$

$$l_n = \rho^* - \varepsilon, 0 < \varepsilon_1 < \rho_n^*, m_n = \rho$$

$$\frac{l_i}{m_i} = \beta \log(1-R_n) - c(R), i = 1, 2 \ldots, n-1.$$

$$C(R) = -1 + \frac{\rho}{\rho_n^* - \varepsilon}\beta \log(1-R)$$

$$\lambda = \frac{C(R)}{\beta \log(1-R_n)}, \mu = 1 - \lambda = \frac{\beta \log(1-Rn) - C(R)}{\beta \log(1-R_n)}$$

$$1 - t_i = 1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_i}{\lambda l_i + \mu m_i}\beta \log(1-R)\right)\right\}$$

$$1 - s_i = \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_i}{\lambda l_i + \mu m_i}\beta \log(1-R)\right)\right\} \quad (13)$$

इसी तरह

$$1 - t_n = \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_n}{\lambda l_n + \mu m_n}\beta \log(1-R_n)\right)\right\}$$

$$1-s_n=\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_n}{\lambda l_n+\mu m_n}\beta\log(1-R_n)\right)\right\}$$

(13) से

$$\log(1-t_i)=1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R)\right)\right\}$$

$$\lambda\beta(\log(1-t_i)=\frac{\lambda l_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R) \tag{14}$$

इसी तरह

$$\mu\beta(\log(1-s_i)=\frac{\mu m_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R) \tag{15}$$

(14) तथा (15) का योग करने पर

$$\exp\beta^{-1}[\lambda\beta\log(1-t_i)+\mu\beta\log(1-s_i)]=1-R_c \tag{16}$$

असमिका (12) का उपयोग $t_i$, $S_i$ का मान $i = 1,2,\ldots n$, के लिए करने पर

$$\phi[1-1+R,1-1+R,\ldots,1-1+R_n]\leq\lambda\phi$$

$$\left[1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R)\right)\right\},\ldots,1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_i}{\lambda l_n+\mu m_n}\beta\log(1-R_n)\right)\right\}\right]$$

$$+\mu\phi\left[1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_i}{\lambda l_i+\lambda m_i}\beta\log(1-R)\right)\right\},\ldots,1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_n}{\lambda l_n+\mu m_n}\beta\log(1-R_n)\right)\right\}\right] \tag{17}$$

$$= I + II$$

$\rho$ तथा $\rho_n^*$ की परिभाषा से हम प्राप्त करते हैं

$$\phi(R)\leq C_\varepsilon^1+\alpha^{-1}\left[\sum_{i-1}^{n}-(\rho+\varepsilon)\beta\log(1-R)\right] \tag{18}$$

एवं $\phi\left(R_1^{(0)},\ldots,R_{n-1}^{(0)},R_n\right)\leq C_\varepsilon^{(2)}+(\gamma+\varepsilon_2)\alpha^{-1}\left\lfloor\rho_n^*\beta(1-R_n)\right\rfloor \qquad (19)$

इस प्रकार

$$I = \lambda\phi\left[1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R)\right)\right\}\right.$$
$$1-\exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{l_n}{\lambda l_n+\beta m_n}\beta\log(1-Rn)\right)\right\}$$
$$\le \lambda C_\varepsilon^{(1)}+\lambda\alpha^{-1}\left[\sum_{i-1}^{n-1}\frac{(\rho+\varepsilon)}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R)\right] \tag{20}$$
$$+\lambda\alpha^{-1}\left[\frac{(\rho+\varepsilon)l_n}{(\lambda l_n+\mu m_n)}\beta\log(1-R)\right]$$
$$\left. = \quad I_1+I_2\right]$$

अब $$I_1 \le C_\varepsilon^{(1)}+(n-1)\alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho+\varepsilon)l_i}{\lambda l_i+\mu m_i}\beta\log(1-R)\right]$$

$\lambda, \mu, \frac{l_i}{m_i}$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$I_1 \le C_\varepsilon^{(1)}+(n-1)\alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho+\varepsilon)(\rho_n^*-\varepsilon_i)}{\rho}\beta\log(1-R_N)\right]$$

$$= C_\varepsilon^{(1)}+(n-1)\alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho+\varepsilon)(\rho_n^*-\varepsilon_i)}{\rho}\beta\log(1-R_N)\right] \tag{21}$$

अब $$I_2 \le \alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho+\varepsilon)l_n}{\lambda l_n+\mu m_n}\beta\log(1-R_n)\right]$$

पुनः $l_n, M_n, \lambda, \mu$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$I_2 \le \alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho+\varepsilon)\left(P_n^*-\varepsilon_1\right)\beta\log(1-R_n)}{C(R)(P_n^*-\varepsilon_1-\rho)+\rho\beta\log(1-R_n)}\right]$$

$C(R)$ का मान रखने पर तथा सिद्ध करने पर

$$I_2 \le \alpha^{-1}\left[-(\rho+\varepsilon)(\rho_n-\varepsilon)(1+0(1))\beta\log(1-R_n)\right]$$

प्राप्त होता है जहाँ $0(1) \to 0$ ज्यों ज्यों $R_n \to \infty$ (22)

पुनः $II = \mu\phi\left(1 - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_1}{\lambda l_i + \mu m_i}\beta \log(1-R\right)\right\}\right), \ldots,$

$$I - \exp\left\{\beta^{-1}\left(\frac{m_n}{\lambda l_n + \mu m_n}\beta \log(1-R_n\right)\right\}\right)$$

$$II \le C_{\varepsilon_1}^{(2)} + (\gamma + \varepsilon_2)\alpha^{-1}\left[\frac{-(\rho_n^* m_n)}{\lambda l_n + \mu m_n}\beta \log(1-R_n)\right]$$

$$= C_{\varepsilon_1}^{(2)} + (\gamma + \varepsilon_2)\alpha^{-1}\left[-\left(\rho_n^*\beta \log(1-R_n) + \rho_n^*\beta \log(1-R_n)\left(\frac{m_n}{\lambda l_n + \mu m_n} - 1\right)\right)\right]$$

$$= C_{\varepsilon_2}^{(2)} + (\gamma + \varepsilon_2)\alpha^{-1}\left[-\left(\rho_n^*\beta \log(1-R_n) + \rho_n^*\beta \log(1-R_n)\left(\frac{m_n}{\lambda l_n + \mu m_n}\right)\right)\right]$$

(23)

$l_n, M_n, \lambda,$ तथा $\mu$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$II \le C_{\varepsilon_2}^{(2)} + (\gamma + \varepsilon_2)\alpha^{-1}\left[\rho_n^*\beta \log(1-R_n) + \frac{\rho_n^* C(R)(\rho - \rho_n^* + \varepsilon_n}{(1+0(1))}\right] \quad (24)$$

जहाँ $0(1) \to 0$ ज्यो-ज्यों $R_n \to \infty$ स्थिर R के लिए

$\varepsilon$ को इतना लघु लिया गया कि

$$\left(\rho_n^* - \varepsilon_1\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right) < \left(\rho_n^* - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$$

तब (21) तथा (22) असमिकाओं से यह निकलता है कि

$$I \le \alpha^{-1}\left[\left(\rho_n^* - \frac{\varepsilon_1}{4}\right)\beta \log(1-R_n)\right]$$

अतः (24) से हमें प्राप्त होता है -

$$\sigma \leq \limsup_{R_n \to 1} \frac{(\gamma+\varepsilon_2)\alpha^{-1}\left[\rho_n^* \beta \log(1-R_n) + \rho_n^* C(R)(\rho_n^* + \varepsilon_1)\right]}{\alpha^{-1}\left[\rho_n^* \beta \log(1-R_n)\right]}$$

$$= \limsup_{R_n \to 1} (\gamma+\varepsilon_2) \frac{1-\exp\left[-\rho_n^* \beta \log(1-R_n) + \rho_n^* C(R)(\rho_n^* + \varepsilon_1)\right]^{1/k}}{1-\exp\left(\frac{-\rho_n^* \beta \log(1-R_n)}{\lambda}\right)^{1/k}}$$

अतः $\sigma n \leq r$ सीमांत को लेने तथा तथा निश्चयात्मक कथन को सिद्ध करने पर।

**प्रमेय 2 की उपपत्ति**

हम फलन $\phi(\tilde{Z}, w)$ पर विचार करते हैं जो समिश्र चरों $(n+1) z_1, z_2, \ldots z_n w$ वाला है और $\phi(\tilde{Z}, w) = f(w, \tilde{Z}) = \sum_{\|k\|=m}^{\infty} b_k \tilde{Z}^{\bar{k}}$ द्वारा परिभाषित है जहाँ $|w| < 1$

सेट $P_m(\tilde{Z}) = \sum_{\|\bar{k}\|=m}^{\infty} b_k \tilde{Z}^{\bar{k}}$

तब $\phi(\bar{Z} w) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tilde{Z}) W^m$

G यूनिट डिस्क में $\omega$ का वैश्लेषिक फलन है। एक चर में घात श्रेणी के गुणांकों के लिए कॉशी असमिका का सम्प्रयोग करने पर $0 < t < 1$ तथा $\tilde{Z} \varepsilon G$ के लिए हम प्राप्त करते हैं

$$\left|\rho_m(\tilde{Z})\right| \leq \frac{\max_{|w|=t} |\phi(\tilde{Z}, w)|}{t^m} \tag{25}$$

$$\max_{|w|=t} |\phi(\tilde{Z}, w)| \leq M_G(t, f)$$

तब $$|\rho_m(\tilde{Z})| \leq \frac{M_G(t, f)}{t^m} \tag{26}$$

चूँकि (26) प्रत्येक $\tilde{Z} \varepsilon G$ के लिए सत्य है अतः

$$M_G(1, P_m) = \max_{r\varepsilon G} M(\bar{r}, P_m)$$

$$= \max_{|Z|=r} |P_m(\tilde{Z}) \text{ जहाँ } i = 1,\ldots,n \text{ तथा } (r_i, \ldots, (r_i, \ldots, r_n)\varepsilon G$$

$$= \frac{M_G(t, f)}{t^m}$$

अतः समस्त t, $0 < t < 1$ और प्रत्येक धन पूर्णांक m के लिए

$$M_G(1, P_m) \le \frac{M_G(t, f)}{t^m} \tag{27}$$

$\log^{[q]} M_G(t, f) < \log(1-t)^{\rho} G^{-\varepsilon}$ समस्त t के लिए जो $0 < t < 1$ को तुष्ट करता है।

$$M_G(t, f) < \exp^{[q]}\left[\log(1-t)^{-P_G-\varepsilon}\right]$$

अतः (27) से $0 < t < 1$ तथा कोई धन पूर्णांक m प्राप्त होता है

$$M_G(1-P_m) \le \exp^{[q]}\left[\log(1-t)^{-P_G-\varepsilon}\right] \Big/ t^m$$

$$< \exp^{[q-1]^{\left[\log(1-t)^{-P_G-\varepsilon}\right]}} \Big/ t^m \tag{28}$$

असमिका (28) के दक्षिण पक्ष को न्यूनतम बनाने पर

$$M_G(1-P_m) \le A \exp^{[q-1]}\left[(1+\rho_G+\varepsilon)\left(\frac{m}{\rho_G+\varepsilon}\right)^{\frac{\rho_G+\varepsilon}{\rho_G+\varepsilon+1}}\right] \tag{29}$$

प्राप्त होता है।

अब हम बहुपद $\rho_m(Z).I$ या $\|k\| = m$ तथा कोई $\bar{r}\varepsilon G$ के गुणांको पर ऊपरी सीमांत

खोजते हैं ।

$$\left|b_{\bar{k}}\right| \le \frac{M(\bar{r}, Pm)}{\bar{r}^{\bar{k}}}$$

समस्त $\bar{r}\varepsilon G$ के लिए इस असमिका के दक्षिण पक्ष को न्यूनतम करने पर यह निकलता है कि किसी k के लिए $\|\bar{k}\| = m$ सहित

$$\left|b_{\bar{k}}\right| \le M_G(1 - P_m)$$

इस असमिका को (29) के साथ मिलाने पर

$$\left|b_{\bar{k}}\right| \le A \exp^{[q-1]}\left[(1+\rho_G+\varepsilon)\left(\frac{m}{\rho_G+\varepsilon}\right)^{\frac{\rho_G+\varepsilon}{\rho_G+1}}\right] \tag{30}$$

$$\log^{[q-1]}[b_{\bar{k}}] \le \left[(1+\rho_G+\varepsilon)\left(\frac{m}{\rho_G+\varepsilon}\right)^{\frac{\rho_G+\varepsilon}{\rho_G+\varepsilon+1}}\right]$$

$$\log^{[q]}[b_{\bar{k}}] \le \log(1+\rho_\varepsilon+\varepsilon) + \frac{\rho_G+\varepsilon}{\rho_G+\varepsilon+1}[\log m - \log(\rho_G+\varepsilon]$$

$$\frac{\log^{[q]}[b_{\bar{k}}]}{\log m} \le \frac{\log(1+\rho_\varepsilon+\varepsilon)}{\log m} + \frac{\rho_G+\varepsilon}{\rho_G+\varepsilon+1} - \frac{(\rho_G+\varepsilon)}{(\rho_G+\varepsilon+1).\log m}\log(\rho_G+\varepsilon)$$

$$= \frac{\rho_G}{\rho_G+1} \tag{31}$$

विलोम असमिका के लिए -

$$\limsup_{\|\bar{k}\|\to\infty} \frac{\log^{[q]}|b_{\bar{k}}|}{\log m} = \mu \tag{32}$$

माना कि $\mu < 1$ तब (32) से यह निकलता है कि किसी $0 < \varepsilon < 1 - \mu$ के लिए एक अनृण पूर्णांक $m(\varepsilon)$s.t. होता है क्योंकि $\|K\| \ge m(\varepsilon)$

$$\frac{\log^{[q]}|b_{\bar{k}}|}{\log m} \leq \mu + \varepsilon < 1$$

$$\log^{[q]}|b_{\bar{k}}| \log m^{\mu+\varepsilon}$$

$$\log^{[q-1]}|b_{\bar{k}}| \leq m^{\mu+\varepsilon}$$

$$|b_{\bar{k}}| \leq \exp^{[q-1]} m^{\mu+\varepsilon}$$

$$M_G(t,f) \leq \max_{r\varepsilon G} \sum_{\|\bar{k}\|=0}^{\infty} |b_{\bar{k}}| \bar{r}^{\bar{k}} t^{\|\bar{k}\|}$$

$$\leq \sum_{\|\bar{k}\|=0}^{\infty} |b_{\bar{k}}| \bar{r}^{\bar{k}} t^{\|\bar{k}\|}$$

$$\leq \sum_{\|\bar{k}\| \leq m(\varepsilon)} t^{\|\bar{k}\|} |b_{\bar{k}}| + \sum_{\|\bar{k}\| > m(\varepsilon)} t^{\|\bar{k}\|} \exp^{[q-1]}(m^{\mu+\varepsilon})$$

$$< C_1 t^{m(\varepsilon)} + C_2 + \sum_{m=0}^{\infty} t^m (1+m)^m \exp^{[q-1]} m^{\mu+\varepsilon} \qquad (33)$$

जहाँ $C_1$ तथा $C_2$ स्थिरांक हैं। अब फलन

$$F(\bar{Z}) = \sum_{m=0}^{\infty} (1+m)^n \exp^{[q-1]} m(\mu+\varepsilon) Z^m$$ G में वैश्लेषिक है।

एक चर वाली दशा में कोटि (order) की परिभाषा से किसी $\varepsilon' > o$ तथा t पर्याप्त निकट है t के लिए

$$M_G(t,f) < \exp^{[q-1]}\left\{(1-t)^{-\left(\frac{\mu+\varepsilon}{1-\mu-\varepsilon}+\varepsilon^1\right)}\right\}$$

किन्तु (33) से

$$M_G(t,f) < C_1 tm^{(\varepsilon)} + C_2 + M_G(t,f)$$

जिससे 1 के अति निकट t के लिए

$$M_G(t,f) < C_1 t^{m(\varepsilon)} + C_2 + \exp^{[q-1]}\left\{(1-t)^{-\left(\frac{\mu+\varepsilon}{1-\mu-\varepsilon}+\varepsilon^1\right)}\right\}$$

$$\lim_{t\to1}\frac{\log^{[q]} M_G(t,f)}{-\log(1-t)} < \lim_{t\to1}\frac{-\left(\dfrac{\mu+\varepsilon}{1-\mu-\varepsilon}\right)\log(1-t)}{-\log(1-t)}$$

$$\rho_G \leq -\frac{\mu+\varepsilon}{1-\mu-\varepsilon} = \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\rho_G \leq -\frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\frac{\rho_G}{1+\rho_G} \leq \mu$$

**टिप्पणी :**

1. इस तरह उपर्युक्त प्रमेय से जुनेजा तथा कपूर[1] के प्रमेय (5.2.1) का सार्वीकरण हुआ।
2. उपर्युक्त प्रमेय तीव्रवृद्धि के साथ फलनों के लिए कोटि प्रदान करता है।

**प्रमेय 3 की उपपत्ति**

परिभाषा (5) से

$$\mathrm{Log}^{[q-1]} M_G(t,f) < (T_G+\varepsilon)(1-t)^{-\rho} \tag{34}$$

$M_G(1,P_m) \leq \dfrac{M_G(t,f)}{t^m}$ समस्त t के लिए, $0 < t < 1$ तथा असमिकाओं में प्रत्येक पूर्णांक

$$M_G(1,P_m) \leq \exp^{[q-1]}\left[\left((T_G+\varepsilon)(1-t)^{-\rho}G\right)\right]t^m$$

$$M_G(1,P_m) \leq \exp^{[q-1]}\left[\left((T_G+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho_G+\varepsilon}}\frac{\rho_G+1}{\rho_G}, m\frac{\rho_G}{\rho_G+1}\right)\right] \tag{35}$$

$$|b_k| \leq M_G(1,P_m)$$

(35) से

$$|b_{\bar{k}}| \le \exp^{[q-1]}\left[\left((T_G+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho_G+\varepsilon}} \frac{\rho_G+1}{\rho_G}||\bar{k}||\frac{\rho_G}{\rho_G+1}\right)\right] \text{ जहाँ } \|\bar{k}\| = m$$

$$\log^{[q-1]}|b_{\bar{k}}| \le (T_G+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho_G+\varepsilon}} \frac{\rho_G+1}{\rho_G}||\bar{k}||^{\frac{\rho_G}{\rho_G+1}}$$

$$\frac{\rho_G}{\rho_G+1}\frac{1}{(T_G+\varepsilon)^{1/\rho_G+\varepsilon}} \le \frac{||\bar{k}||^{\frac{\rho_G}{\rho_G+1}}}{\log[q-1]|b_{\bar{k}}|}$$

$$\frac{\rho_G}{\rho_G+1}(T_G+\varepsilon)^{1/\rho_G+\varepsilon} \le \frac{||\bar{k}||^{\frac{\rho_G}{\rho_G+1}}}{\log[q-1]|b_{\bar{k}}|}$$

$$\frac{\rho_G}{\rho_G+1}(T_G)(T_G)^{1/\rho_G} \limsup_{||\bar{k}||} \frac{\log[q-1]|b_{\bar{k}}|}{||\bar{k}||^{\frac{\rho_G}{\rho_G+1}}}$$

इसी प्रकार विलोम असमिका सिद्ध करने के लिए हम $M_G(t,f)$ का आकलन (1) के दक्षिण पक्ष के पदों में करते हैं।

## निर्देश


1. जुनेजा, ओ.पी. तथा कपूर, जी. पी. : Analytic functions - growth aspects, Research notes in Mathematics 104, Pitman, 1985.
2. त्रिपाठी, डी.डी. : On the growth of a class of Plurisubharmonic function in a Unit Disc II, IAPS., 1999, 337-349.
3. रोकिन, एल. आई. : Introdduction to the theory of entire functions of seveal complex variables., (Translation of Math. Monograph, Vol. 44) American, Mathematical Society, 1974..
4. सिनहा, ए. : J. Indian Insitute of Science 1989, 69, 441-448
5. सेरमेटा, एम. एन. : Amer. Math. Soc. Transl., 1970, 88, 291-301
6. जुनेजा, ओ. पी. तथा सिनहा, ए. : Complex variables 1987, 8, 267-269.
7. वही : .Complex variables, 1985, 5, 1-15

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 4, October 2003

# आयलर-डार्बो समीकरण की दृष्टि में अतिपरवलयिक फलन वाला आंशिक समाकल - I

पी. एल. सेठी तथा महमूद ए. ए. अलताब

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास यूनिवर्सिटी, जोधपुर (राज0)

[ प्राप्त — नवंबर 13, 2002]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में आयलर-डार्बो समीकरण के हल की विवेचना प्रस्तुत की गई है।

## Abstract

**Fractional integro-differential involving hyperbolic function in view of Euler-Darboux equation. I** *By* P.L.Sethi and Mahmoud A.A.Altayeb, Department of Mathematics & Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

In this paper, the authors discussed a solution of the Euler-Darboux equation with boundry condition involving generalized fractional or derivatives associated with hyperbolic functin, a problem reduced to a dominate singular integral equation with Cauchy kernel. Results of this paper have a wide range of applications in the field of mixed boundry value problem to solve dual, triple and quadruple integral equations of Mathematical Physics.

## प्रस्तावना

नाहुसेव[4] ने अपहसित अतिपरवलयिक समीकरण के लिए एक प्रमेय की कल्पना की जिसका रूप

$$Y^m u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad (m>o) \qquad (1)$$

आयलर-डार्बोस समीकरण में अतिपरवलयिक फलन होता है जिसका स्वरूप है -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{\cosh x - \cosh y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{\cosh x - \cosh y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1) \tag{2}$$

इसमें समीकरण (1) निहित है । अनुभाग 3 में (2) के लिए एक प्रमेय रखेंगे जिसके सीमा प्रतिबन्धों के दो लक्षणों में हमारा आंशिक समाकल रहता है।

## 2. सार्वीकृत आंशिक समाकल तथा व्युत्पन्न

माना कि $\alpha > 0$ तथा $\beta$, $\eta$ एवं t वास्तविक संख्याएं हैं। हम $(a, \infty)$ पर वास्तविक तथ संतत फलन f(x) के आंशिक समाकल को परिभाषित करेंगे जिसका x = a पर 1 या $-\beta + \eta + 1$ से कम कोटि के $-\beta < \eta$ अथवा $\beta \le \eta$ अनन्त x = a पर 1 या $-\beta + \eta + 1$ से कम कोटि का हो यदि $-\beta < \eta$ या $\beta \ge \eta$

$$I_{ax}^{\alpha,0,\eta} f = \frac{(\cosh x - \cosh a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma\alpha}\int_a^x (\cosh x - \cosh t)^{\alpha-1} F[x] f(t) \tag{3}$$

जहाँ $F[x] = F\left(\alpha + \beta - \eta; \alpha; \frac{\cosh x - \cosh t}{\cosh x - \cosh a}\right)$

व्यंजक (3) रीमान-लाओविले, एर्डेल्यी-कोबर, हार्डी-लिटिलवुड द्वारा लिये गये आंशिक समाकलों का सार्वीकरण है जो क्रमशः

$$I_{ax}^{\alpha,-\alpha,\eta} f = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_a^x (\cosh x - \cosh t)^{\alpha-1} f(t) dt \equiv R_{ax}^{\alpha} f \tag{4}$$

तथा $I_{ax}^{\alpha,0,\eta} f = \frac{(\cosh x - \cosh a)^{-\alpha-\eta}}{\Gamma\alpha}\int_a^x (\cosh x - \cosh t)^{\alpha-1}$

$$\times (\cosh x - \cosh t)^{\eta} f(t) dt \equiv E_{ax}^{\alpha,\eta} f, \tag{5}$$

हैं[6] $\alpha > 0$ के लिए सार्वीकृत आंशिक व्युत्पन्न को

$$I_{ax}^{\alpha,0,\eta} f \equiv \frac{d^n}{dx^n} I_{ax}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f \tag{6}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। यदि दक्षिण पक्ष का निश्चित अर्थ हो तो यह कल्पना की जाती है कि $0<\alpha+n\leq 1$ (जहाँ n धन पूर्णांक है), l तथा n धन पूर्णांक हैं।

सम्बन्ध (b) भी $\alpha>0$ के लिए वैध है।

कोई आंशिक समाकल, जिसकी निम्नतर सीमा चर x है जो अचर ऊपरी सीमा b से छोटी है।

वह $J_{xb}^{\alpha,0,\eta} f \equiv I_{0,b-x}^{\alpha,0,\eta} f_1$

$$\equiv \frac{(\cosh b-\cosh x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\cosh t-\cosh x)^{\alpha-1} F\begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} f(t)dt \qquad (7)$$

द्वारा परिभाषित है जहाँ

$$F\begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} = F\left(\alpha+\beta-\eta;\alpha;\frac{\cosh t-\cosh x}{\cosh b-\cosh x}\right)$$

यहाँ पर $\alpha>0$ एवं $f_1(+)=f(b-t)$ यदि $0<\alpha+n\leq 1$ तो हम आंशिक व्युत्पन्न की परिभाषा

$$J_{xb}^{\alpha,\beta,\eta} f \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} J_{xb}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f, \qquad (8)$$

द्वारा देंगे जहाँ n धनात्मक पूर्ण संख्या है। माना कि

$$J_{xb}^{\alpha,-\alpha,\eta} f \equiv L_{xb}^{\alpha} f$$

जैसा सैगो ने[6] प्राप्त किया है, निम्नांकित उत्पाद नियम सत्य होते हैं

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta} I_{ax}^{\gamma,\delta,\alpha,+\eta} = I_{ax}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} \qquad (\alpha,\gamma>0), \qquad (9)$$

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta} I_{ax}^{\gamma,\delta,\eta-\gamma-\delta} = I_{ax}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\gamma} \qquad (\alpha,\gamma>0), \qquad (10)$$

ये सभी अब भी ऋण-गैर पूर्णांक $\alpha$ के लिए वैध हैं।

यदि देखा जाता है कि $I_{ax}^{0,0,\eta}$, किसी $\eta$ के लिए तत्समक आपरेटर है तो $I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}$ के व्युत्क्रम आपरेटर को

$$(I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{ax}^{-\alpha-\beta+\eta}$$

द्वारा दिया जाता है जो [9] या [10]के द्वारा दिया जा सकता है।

(9) से लेकर (11) तक के सूत्र आपरेटर J के लिए भी सत्य हैं जैसा कि सक्सेना तथा सेठी[7] ने परिभाषित किया है।

### 3. आयलर-डार्बो समीकरण

हम प्रक्षेत्र $\Omega = (0 < x < y < 1)$ में समीकरण (2) पर विचार करेंगे । यह भलीभांति ज्ञात है[12] कि (2) का हल निम्नांकित प्रतिबन्धों

$$u|_{y=x} = \tau(x), (\cosh y - \cosh x)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{y=x} = v(x) \tag{12}$$

में निम्नवत् व्यक्त किया जाता है

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \tau[\cosh x + (\cosh x - \cosh y)\cosh t]$$

$$\times(\cosh t)\ (1-\cosh t)^{\alpha-1}dt + \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}(\cosh y - \cosh x)^{1-\alpha-\beta}$$

$$\int_0^1 v[\cosh x + (\cosh x - \cosh y)\cosh t](\operatorname{sec} ht)^{\alpha}(1-\cosh t)^{-\beta}dt \tag{13}$$

तब दो लक्षण $x = 0$ तथा $y = 1$ पर $\mu$ के मानों को आंशिक समाकलों (3) तथा (7) के पदों में निम्नवत् लिखा जा सकता है -

$$u^{(1)}(y) \equiv u(0,y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{0y}^{\alpha,0,\beta-1}\tau + \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} I_{0y}^{1-\beta,\alpha+\beta,\beta-1} v, 0 < y < 1, \tag{14}$$

$$u^{(2)}(y) \equiv u(x,1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} J_{0y}^{\beta,0,\alpha-1}\tau$$

$$+\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} J_{x1}^{1-\alpha,\alpha+\beta-1,\alpha-1} v, \qquad 0 < x < 1, \tag{15}$$

माना कि $H^{k'}(T)$ b फलनों की ऐसी श्रेणी है जिन्हें असली अन्तराल t तथा होल्डर इंडेक्स सहित T में होल्डर संतत है। हम विवृत अन्तराल (0,1) को U द्वारा तथा इसके समापन को $\overline{U}$ द्वारा अंकित करेंगे।

**प्रमेय** A : (2) का Ω में हल u (x,y) करने के लिए, जिससे

(i) $\tau(x) \in H^{k'}(\overline{U})$ तथा $v(x) \in H^{k_2}(U)$ किसी $k_1$ तथा $k_2$ $(0 < k_1, k_2 < 1)$ के लिए जहाँ v(x) में अंतिम बिन्दु U पर $1-\alpha-\beta$ से अधिक बड़ा नहीं है ।

(ii) (14) तथा (15) में $u^{(1)}(y)$ तथा $u^{(2)}(x)$ संगत परिसीमा प्रतिबन्धों को तुष्ट करते हैं.

$$I_{0y}^{a,b,-a+\beta-1}u^{(1)} = \varphi_1(y), y \in U \quad (16)$$

तथा $$J_{x1}^{c,d,-c+\alpha-1}u^{(2)} = \varphi_2(x), x \in U \quad (17)$$

जहाँ a, b, c तथा d ऐसे अचर हैं कि $(-\alpha-\beta-1) < a < \min(\beta, 1-\alpha), b > \alpha-\beta$, $\max(-\beta, \alpha-1) < c < \min(\alpha, 1-\beta)$ तथा $d > -\alpha-\beta$ तथा $\varphi_1 \in H^{k_3}(\overline{U})[\max(a-\beta+1,\ a+\alpha, -b) < k_3 < 1, \varphi_1(0) = 0]$ तथा $\varphi_2 \in H^{k_4}(\overline{U})[\max(c-\alpha+1, c+\beta, -d-\alpha-\beta+1) < k_4 < 1, \varphi_2(1) = 0]$ ज्ञात फलन है

हम स्मरण करते हैं कि यदि $a = b = c = d = 0$ तो प्रमेय A गुर्सट प्रमेय में समानीत हेा जाता है। यदि हम (14),(15) तथा (9) पर विचार करें और y को x द्वारा प्रतिस्थापित करें तो प्रतिबन्ध (16) तथा (17) को निम्नवत् पढ़ सकते है -

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{0x}^{a+\alpha,b,-a+\beta-1}\tau + \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} \times I_{0x}^{a-\beta+1,b+\alpha+\beta-1,-a+\beta-1}v = \varphi_1(x) \quad (18)$$

तथा

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} J_{x1}^{c+\beta,d,-c+\alpha-1}\tau + \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} J_{x1}^{c-\alpha+1,d+\alpha+\beta-1,-c+\alpha-1}v = \varphi_2(x) \text{on} U \quad (19)$$

**प्रमेय** B : हल निकालने के लिए (18) तथा (19) में आये τ(x) तथा v(x) प्रमेय A में प्रतिबन्ध (ii) को तुष्ट करते हैं जहाँ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), a, b.c$ एवं d प्रमेय A में दिये गये है।

(18) के दोनों पक्षों में $\left(I_{0x}^{a+\alpha,b,-a+\beta-1}\right)^{-1} = I_{0x}^{a+\alpha,b,-a+\beta-1}$ की संक्रिया करने पर

$$\tau(x) + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)} R_{0x}^{1-\alpha-\beta} v = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} I_{0x}^{-a-\alpha-b,\alpha+\beta-1} \varphi_1 \tag{20}$$

इसी तरह $\left(J_{x1}^{c+\beta,d,-c+\alpha-1}\right) = J_{x1}^{-c-\beta-d,\alpha+\beta-1}$, का उपयोग करने पर हमें

$$\tau(x) + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)} L_{x1}^{1-\alpha-\beta} v = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} J_{x1}^{-c-\beta-d,\alpha+\beta-1} \varphi_2 \tag{21}$$

प्राप्त होता है। (20) में से (21) को घटाने तथा दोनों पक्षों में $R_{0x}^{\alpha+\beta-1}$ की संक्रिया से निम्नांकित सम्बन्ध प्राप्त होते हैं -

$$\tau(x) - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} R_{0x}^{\alpha+\beta-1} L_{x1}^{1-\alpha+\beta} v = \varphi_2(x) \tag{22}$$

$$\phi_0(x) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} R_{0x}^{\alpha+\beta-1} I_{0x}^{-a-\alpha,b,\alpha+\beta-1} \varphi_1$$

$$- \frac{2\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} R_{0x}^{\alpha+\beta-1} J_{0x}^{-c-\beta,-d,\alpha+\beta-1} \varphi_2 \tag{23}$$

यह अच्छी तरह ज्ञात है[13] कि सम्बन्ध

$$R_{0x}^{-\alpha} L_{x1}^{\alpha} = \cos\pi\alpha\varphi(x) + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\cosh u}{\cosh x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\cosh u - \cosh x} \varphi(u)du$$

$0<\alpha<1$ के लिए सत्य है जहाँ समाकल को कॉशी प्रधान मान के रूप में लिया जाता है। तब (22) को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$v(x) - \frac{\tan\pi p}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\cosh u}{\cosh x}\right)^{1-\alpha-\beta} \frac{1}{\cosh u - \cosh x} v(u)du$$

$$= \frac{\sin\pi\alpha}{\cos\pi\beta\sin\pi(\alpha+\beta)} \phi_0(x) \tag{24}$$

यहाँ पर हमने सम्बन्ध $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ का उपयोग किया है जो मैग्नस, ओबरहेटिंगर तथा सोनी[3] का है।

यदि हम एक नवीन अज्ञात फलन $\mu(x)=v(x)x^{1-\alpha-\beta}$ का उपयोग करें तो (24) से $\mu(x)$ के लिए प्रधान विचित्र समाकल समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\mu(x)-\frac{\tan \pi\beta}{\pi}\int_0^1 \frac{\mu(u)}{\cosh u-\cos x}du=\phi(x) \text{on} U \quad (25)$$

जहाँ $\phi(x)=\dfrac{2\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)(\cos\pi\beta)}(\cosh x)^{1-\alpha-\beta}R_{0x}^{\alpha+\beta-1}$

$$I_{0x}^{-a-\alpha,-b,\alpha+\beta-1}\varphi_1-\frac{2\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)(\cos\pi\beta)}(\cosh x)^{1-\alpha-\beta}R_{0x}^{\alpha+\beta-1}\times J_{x1}^{-c-\beta,-d,\alpha+\beta-1}\varphi_2 \quad (26)$$

अब हम (2) में इस सिद्धांत को सम्प्रयुक्त करके (25) को सिद्ध करेंगे। इसके लिए हम अपना समीकरण (25) काम में लावेंगे । मानाकि $L=t_0t_1$ संकुल तल में खुले गैर अप्रतिच्छेदी निष्कोणवक्र में हैं। फलन a(t), b(t) एवं f(t) को L के समापन पर $a(t)-b^2(t)=1$ सहित होल्डर संतत मान लिया गया है। तब L पर प्रधान विचित्र समाकल समीकरण का हल

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\cosh t}d\tau=f(t)$$

$$\varphi(t)=a(t)f(t)-\frac{b(t)z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\cosh t}$$

द्वारा किया जाता है जहाँ $Z(t)=\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{1}{\tau-\cos t}\text{Log}G(\tau)d\tau\right\}$

तथा $G(t)=\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$

उपर्युक्त परिणाम इस परिकल्पना के साथ चालू किये जा रहे हैं कि समीकरण का सूचकांक k शून्य के तुल्य है और हल $\phi(t)$ को L पर $t=t_0$ पर परिबद्ध किन्तु $t=t_1$ पर अपरिबद्ध किन्तु समाकलनीय क्रम से युक्त जहाँ यदि हम $G(t_0)=\rho\exp(i\theta)$ एवं $G(t_1)=\rho'\exp(i\theta+\Delta))$ θ रखें

का परिवर्तन है और [x] बताता है सबसे बड़ी संख्या को जो x से अधिक न हो।

पुनः अपने समीकरण (25) पर लौटते हुए

$$G(x) = \frac{1 + i \tan \pi\beta}{1 - i \tan \pi\beta} = e^{2\pi i(\beta-1)}$$

तब $\theta = 2\pi(\beta - 1), \Delta = 0, k = 0$ तथा $k = 0$ प्राप्त किये जाते हैं। अतः (25) का हल निम्न रूप में होगा

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 \pi\beta}\left[\Phi(x) + \frac{\tan \pi\beta}{\pi}\left(\frac{\cosh x}{1 - \cosh x}\right)^{1-\beta}\right.$$

$$\left.\int_0^1 \left(\frac{1 - \cosh u}{\cosh u}\right)^{1-\beta} \frac{1}{\cosh u - \cosh x} \Phi(u) du\right] \qquad (27)$$

जो U में होल्डर संतत है, जो $x = 0$ पर बद्ध हो और अपरिबद्ध किन्तु $x = 1$ पर समाकलनीय अद्वितीयता से युक्त हो। वहाँ पर हमने विचार किया है कि $\Phi(x)$ होल्डर संतत है $\overline{U}$ पर जिसका सातत्य अगले अनुभाग में सिद्ध किया जावेगा।

(27) से हम प्रतिबन्ध (i) को तुष्ट करने वाले $v(x)$ को सरलता से प्राप्त कर सकते हैं। अगले अनुभाग में यह देखा जावेगा कि (x) बड़ा है $\alpha+\beta-1$, $x=1$ पर। तब (20) या (21) के अनुसार $\tau(x)$ i को तुष्ट करता ज्ञात किया जाता है।

## 4. $\Phi(x)$ की नियमितता तथा $v(x)$ की विचित्रता तथा $x = 1$

हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी -

**प्रमेयिका 1 :** माना कि $a < b$ तथा $0 > k > 1$ यदि $\varphi, \psi \in H^k[a, b]$ समेत $\varphi(a) = \psi(b) = 0$, $0 > \alpha.-k$, $\beta < k$ तथा $\eta > \beta - 1$ तो $I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi J_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}\psi \in H^{k+\alpha}[a, b]$

**उपपत्ति**

परिगणन से

$$I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi = \frac{d}{dx} I_{ax}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1}\varphi = \frac{\Gamma(-\beta + \eta + 1)}{\Gamma(-\beta + 1)\Gamma(\alpha + \eta + 1)}$$

$$(\cosh x - \cosh a)^{-\beta}\varphi(x) + \frac{(\cosh x - \cosh a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\cosh x - \cosh t)^{\alpha-1}$$

$$F\left(\alpha+\beta,\eta;\alpha;\frac{\cosh x-\cosh t}{\cosh x-\cosh a}\right)\{\varphi(t)-\varphi(x)\}dt \qquad (28)$$

यह ज्ञात है कि हाइपरज्यामितीय फलन $F(a, b; c; z)$ की कोटियाँ इस तरह होती हैं कि $0(1), (z\to 0); 0[1-z]^{\min(0,c-a-b)}], (z\to 1)$ तब (28) में समाकलन की अष्टि में निम्नांकित गुण होंगे।

$$(\cosh x-\cosh t)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,\eta;\alpha;\frac{\cosh x-\cosh t}{\cosh x-\cosh a}\right)$$

$$=0\left[(\cosh x-\cosh t)^{\alpha-1}\right](t\to x)$$

तथा $=0\left[(\cosh t-\cosh a)^{\min(0,-\beta+\eta)}\right](t\to a)$

तब $I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi$ का होल्डर सातत्य सिद्ध करने के लिए यह दिखाना पर्याप्त होगा कि

$$A(x)=\int_a^x(\cosh t-\cosh a)^q(\cosh x-\cosh t)^{\alpha-1}$$

$$\{\varphi(t)-\varphi(x)\}dt\in H^{k+\alpha}[a,b] \qquad (29)$$

जहाँ $q=\min(0,-\beta+\eta)$. माना कि $a\le x+h\le b$ तथा अन्तर

$$A(x+h)-A(x)=\int_a^{x+h}(\cosh t-\cosh a)^q(\cosh x+\cosh h-\cosh t)^{\alpha-1}$$

$$[\varphi(t)-\varphi(x+h)]dt-\int_a^{x+h}(\cosh t-\cosh a)^q\times(\cosh x+\cosh t)^{\alpha-1}[\varphi(t)-\varphi(t)]dt$$

$$\int_a^x(\cosh t-\cosh a)^q\left[(\cosh x+\cosh h-\cosh t)^{\alpha-1}-(\cosh x-\cosh t)^{\alpha-1}\right]$$

$$[\varphi(t)-\varphi(x)]dt+\int_a^x(\cosh t-\cosh a)^q(\cosh x+\cosh h-\cosh t)^{\alpha-1}dt$$

$$(\cosh x+\cosh h-\cosh t)^{\alpha-1}[\varphi(t)-\varphi(x+h)]dt\equiv I_1+I_2+I_3 \qquad (30)$$

पर विचार करें। उपयुक्त रीति से समाकल के चरों को बदलने पर, ज्यों ज्यों $h\to 0$

हमें

$$I_1 = 0\left[\int_a^x (\cosh t - \cosh a)^q (\cosh x - \cosh t)^k\right.$$

$$\left.\{(\cosh x + \cosh h - \cosh t)^{\alpha-1} - (\cosh x - \cosh t)^{\alpha-1}\}dt\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^{k+\alpha}(\cosh x - \cosh a + \cosh h)\right.$$

$$\int_1^{1+\frac{x-a}{h}} (\upsilon-1)^k\{(\upsilon)^{\alpha-1} - (\upsilon-1)^{\alpha-1}\}\left(1 - \frac{\cosh h}{(\cosh x - \cosh a + \cosh h)}\upsilon\right)^q d\upsilon$$

$$= 0(\cosh h)^{k+\alpha} \tag{31}$$

$$I_2 = 0\left[(\cosh x - \cosh a)^{q+1}(\cosh h)^k \cosh x - \cosh a + \cosh h)^{\alpha-1}\right.$$

$$\left.\int_0^1 (\upsilon)^q\left(1 - \frac{\cosh x - \cosh a}{\cosh x - \cosh a + \cosh h}\upsilon\right)^{\alpha-1} d\upsilon\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^k F\left(q+1, 1-\alpha; q+2; \frac{\cosh x - \cosh a}{\cosh x - \cosh a + \cosh h}\right)\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^{k+\alpha}\right] \tag{32}$$

$$I_3 = 0\left[\int_x^{x+h} (\cosh t - \cosh a)^q (\cosh x + \cosh h - \cosh t)^{k+\alpha-1} dt\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^{h+\alpha}(\cosh x - a + \cosh h)^q \int_0^1 \upsilon^{k+\alpha-1}\right.$$

$$\left.\left(1 - \frac{\cosh h}{\cosh x - \cosh a + \cosh h}\upsilon\right)^q d\upsilon\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^{k+\alpha} F\left(k+\alpha, -q; k+\alpha+1; \frac{\cosh h}{\cosh x - a + \cosh h}\right)\right]$$

$$= 0\left[(\cosh h)^{k+\alpha}\right], \qquad (33)$$

चूँकि $k+\alpha\rangle 0, q\rangle -1$ तथा

$$\int_0^1 (\cosh t)^{a-1}(1-\cosh t)^{c-\alpha-1}\{1-(\cosh z)(\cosh t)\}^{-b}\,dt$$

$$= \Gamma(a)\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\Gamma(a,b;c;\cosh z)$$

$[\mathrm{Re}\,c\rangle \mathrm{Re}\,a\rangle 0, |\arg(1-z)|\langle \pi, z\neq 1]$ (मैग्नस, आबेरहेटिंग तथा सोनी[3])

जब (30) से लेकर (33) का उपयोग किया जाता है तो (29) $J_{xb}^{q,\beta,\eta}\psi \in H^{k+\alpha}[a,b]$ की उपपत्ति हो सकती है और ये समान्तर हैं।

**प्रमेयिका 2 :** प्रमेयिका 1 के प्रतिबन्ध के अंन्तर्गत $\varphi(a)\equiv\psi(b)=0$ और $\beta<k,(x-\alpha)^{\beta}$ के अलावा $I_{ax}^{q,\beta,\eta}\phi$ और $(b-x)^{\beta}J_{xb}^{q,\beta,\eta}\psi$ का सम्बन्ध $H^{k+\alpha}[a,b]$ से है।

**उपपत्ति :** सम्बन्ध (28) तथा प्रमेयिका 1 की उपपत्ति से पहला परिणाम प्राप्त होता है। उसी तरह दूसरा भी। अब हम (26) में $\phi(x)$ को $\overline{U}$ में होल्डर संतत दिखाना है। प्रमेयिका से विदित है कि $g(x)\equiv I_{ax}^{-a-\alpha,-b,\alpha+\beta-1}\varphi, \in H^{k_3-a-\alpha}(\overline{U})$ क्योंकि $k_3 > a+\alpha$, $k_3 > b+\alpha$, $b+\alpha>0$, तथा $\varphi_1(0)=0$ तो प्रमेयिका से यह अर्थ निकलता है कि $X^{1-\alpha-\beta}R_{ox}^{\alpha+\beta-1}g \in H^{k_3-a+\beta-1}(\overline{U})$ इसी तरह प्रमेयिका बताती है $h(x)\equiv J_{x1}^{-c-\beta,-d,\alpha+\beta-1}\varphi_2 \in H^{k_4-c-\beta}(\overline{U})$ जो परिकल्पनाओं $k_4\rangle c+\beta, k_4+d\rangle 0, d+\alpha+\beta\rangle 0$ एवं $\varphi_2(1)=0$ के कारण है। इस तरह प्रमेयिका 2 से $X^{1-\alpha-\beta}R_{ox}^{\alpha+\beta-1}h \in H^{k_4-c+\alpha-1}(\overline{U})$ इसलिए यह सिद्ध किया गया कि $\theta(x)\in H^{\min(k_3-a+\beta-1,k_4-c+\alpha-1)}\overline{U}$

x = 1 पर $v(x)$ की विचित्रता के क्रम को देखने के लिए हम (19) के दोनों ओर $\left(J_{x1}^{c-\alpha+1,d+\alpha+\beta-1,c+\alpha-1}\right)^{-1}=\left(J_{x1}^{c-\alpha+1,d+\alpha+\beta-1,c+\alpha-1}\right)$ संक्रिया करते हैं तब हमें प्राप्त होता है

$$v(x)=\frac{2\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}L_{x1}^{\alpha+\beta-1}\tau$$

$$+\frac{2\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}J_{x1}^{-c+\alpha-1,-d-\alpha-\beta-1,0}\varphi_2$$

—

इस प्रकार प्रमेयिका 1 का निहितार्थ है कि $v(x) = 0\left[(1-x)^{\min(k_1+\alpha+\beta-1, k_4-c+\alpha-1)}\right](x \to 1)$ जहाँ $k_1$ होल्डर सूचकांक है $\tau$ का। यहाँ पर प्रतिबन्ध $\tau(1) = 0$ का उपयोग किया गया है जो (21) तथा प्रमेयिका 1 के बल पर प्राप्त होता है। अतः हमने यह स्थापित कर दिया $x = 1$ पर $v$ $\alpha+\beta-1$ से बड़े कोटि का है ।

## निर्देश


1. बिकाड्जे, ए.वी. : On the theory of equations of mixed type whose order is digenerate along the line on which the type changes, Centinuum Mechanics and Related Problems of Analysis, Izdat, Nauka, Moscow 1972, 47-52.
2. हार्डी, जी.एच. तथा लिटिलवुड, जे.ई. : Math : Z. 1928, 27, 565-606
3. मैग्नस, डब्लू., आबरहेटिंगर, एफ. तथा सोनी, आर.पी. : Formulas and theorems for the special functions of mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin. (1966).
4. नाहुसेव, ए.एल. : Soviet Math.Doki 1969, 10, 935-938.
5. रास, बी. (सम्पादक) : Fractional calculus and its applications Lecture Notes in Math. 457, Springer-Verlag, Berlin. (1975)
6. सैगो, एम. : Math-Rep.Kyushu Univ,. 1978,77,935-938
7. सक्सेना, आई.के. तथा सेठी, पी.एल. : .Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. 1973, A23, 121-130.
8. वही : Proc. India Acad. Sci 1973, A-78, 267-273
9. वही : India J. Pure Appl. Math 1975, 6, 512-521
10. सक्सेना, आर.के. सेठी, पी.एल. तथा बनर्जी, पी.के. : .Bull Calcutta Math.Soc. 1975, 67, 225-228.
11. सेठी, पी.एल. तथा बनर्जी, पी.के, : J. Indian Math. Soc. 1975, 38, No. 1-4, 359-363
12. स्मिर्नोव, एम.एम. : Differential'nye Uravnenija 1977, 13, 931-943
13. वही : Degenerate hyperbolic equations, Izdat, Vyseisaja Skola, Minsk, (1977)

## लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका मे वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमे प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिए।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे ($K_4FeCN_6$) अथवा ( $\alpha\beta_1\gamma^4$ ) इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों मे नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा मे भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी मे एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियो (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियो के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर. आर. तथा म्युलर, जे., जाइट फिजिक. केमि., 1928,150,80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रूपये दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

**प्रबन्ध सम्पादक**

**मूल्य**

| | |
|---|---|
| वार्षिक मूल्य | 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर |
| त्रैमासिक मूल्य | 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर |

**Rates**

Annual Rs. 100 or 20 £ or $ 50
Per Vol. Rs 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

Laser typesetting & Printing :
Indian Offset Printers
Kela Bhawan, 136 Vivekanand Marg,
Allahabad -3
Phone : (0532) 2402859